



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و  
چهاردهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،  
دانشگاه شهید چمران اهواز،  
خوزستان، ایران.  
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰



## به کارگرفتن حالت‌های غیر گاوسی تک مده به منظور بهبود درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی در مدل تاولیس-کامینگز

راضیه موحدی، داود افشار و مجتبی جعفرپور

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

raz.movahedi@gmail.com

da\_afshar@yahoo.com

mojtaba\_jafarpour@yahoo.com

چکیده - با استفاده از مدل تاولیس-کامینگز و به کارگرفتن میدان‌های تک مده غیر گاوسی بهبود درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حالت‌های همدوس زوج و فرد به عنوان حالت‌های میدان در نظر گرفته می‌شوند و حالت خروجی به کمک هامیلتونی تاولیس-کامینگز و عملگر تحول زمانی به دست می‌آید. مشاهده می‌شود برای دستیابی به بیشینه درهم‌تنیدگی حالت اتمی خروجی، انتخاب حالت‌های همدوس زوج و فرد برای میدان ورودی گزینه مناسبتری نسبت به حالت همدوس معمول است.

کلید واژه: حالت‌های غیر گاوسی، حالت‌های همدوس زوج و فرد، درهم‌تنیدگی، مدل تاولیس-کامینگز

## Applying single mode non-Gaussian field states to improve the entanglement of atomic states in Tavis-Cummings model

Razieh Movahedi, Davood Afshar, and Mojtaba Jafarpour

Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz

raz.movahedi@gmail.com

da\_afshar@yahoo.com

mojtaba\_jafarpour@yahoo.com

**Abstract** - Using Tavis-Cummings model and employing single mode non-Gaussian fields, we investigate the entanglement enhancement of atomic states. Even and odd coherent states have been considered as the field states and the output state has been obtained by Tavis-Cummings Hamilton and time evolution operator. It is observed that to achieve the maximum entanglement of the output atomic state, the choice of even and odd coherent states for the field is a more appropriate option than the usual coherent state.

**Key words:** Tavis-Cummings model, even and odd coherent state, entanglement, non-Gaussian states

## مقدمه

درهم‌تنیدگی یک ویژگی کوآنتومی است که دارای کاربردهای گوناگون از جمله انتقال اطلاعات کوآنتومی، ترابرد کوآنتومی و رمزنگاری کوآنتومی است. یکی از روش‌های درهم‌تنیده‌نمودن حالت‌های اتمی، با استفاده از اندرکنش بین اتم و یک میدان الکترومغناطیسی است [۱]. مدل جینز-کامینگز یکی از مدل‌های معروف در اندرکنش اتم-میدان است که در آن اندرکنش یک اتم دوترازه با یک مد میدان کوآنتیده در کاواکی اپتیکی بررسی می‌شود [۲]. مدل تاویس-کامینگز مدل دیگری است که در آن  $N$  اتم با یک میدان تک مده تحت هامیلتونی تاویس-کامینگز در یک کاواک اندرکنش می‌کنند [۳، ۴] و حالت‌های خروجی اتمی در این فرآیند می‌توانند درهم‌تنیده شوند. استفاده از حالت‌های هم‌دوس به‌عنوان میدان ورودی در این مدل منجر به بیشینه درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی نمی‌شود [۵]. درمقاله حاضر با استفاده از مدل تاویس-کامینگز و با تغییر میدان به حالت‌های هم‌دوس زوج و فرد، افزایش درهم‌تنیدگی حالت‌های خروجی اتمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به‌این منظور پیکربندی این مقاله به شرح زیر است: ابتدا مرور کوتاهی بر مدل تاویس-کامینگز می‌کنیم. سپس با میدان‌های ورودی مختلف، میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی خروجی را برحسب پارامترهای مختلف بررسی کرده و بهترین حالت، به‌منظور دستیابی به بیشینه درهم‌تنیدگی حالت خروجی، را معرفی می‌نماییم. در انتها نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

## مدل تاویس-کامینگز

مدل تاویس-کامینگز تعمیم مدل جینز-کامینگز است که در آن اندرکنش دو یا چند اتم دو ترازه با یک مد میدان در درون یک کاواک در نظر گرفته می‌شود. هامیلتونی

تاویس-کامینگز، شامل اندرکنش دو اتم دو ترازه با یک میدان، عبارت است از:

$$H_{T-C} = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_{i=A,B} \hbar\left(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_i^z + ge^{i\theta}\sigma_i^+ a + ge^{-i\theta}\sigma_i^- a^\dagger\right) \quad (1)$$

که در آن  $A$  و  $B$  دو اتم دوترازه،  $\hbar$  ثابت پلانک،  $\omega_0$  فرکانس اتم دوترازه،  $\omega$  فرکانس کاواک،  $\sigma_i^z$  ماتریس پائولی مؤلفه  $z$ ،  $a^\dagger$  و  $a$  عملگرهای بالا و پایین‌آورنده،  $g$  ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان،  $\theta$  فاز و  $\sigma_\pm^i$  ماتریس‌های پائولی بالا و پایین‌آورنده هستند. فرض می‌کنیم هر دو اتم دارای فرکانس یکسان باشند.

## تحول زمانی اتم-میدان در مدل تاویس-کامینگز

عملگر تحول زمانی در مدل تاویس-کامینگز عبارت است از:

$$U(t) = e^{-iH_{T-C}t/\hbar} \quad (2)$$

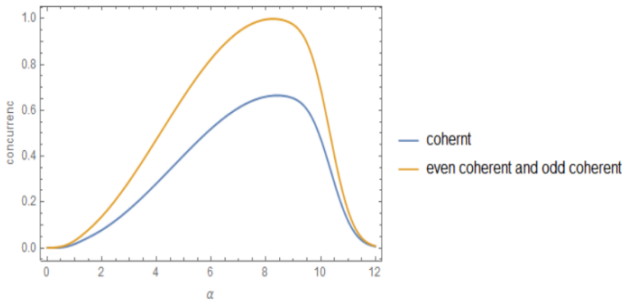
حالت اولیه اتم‌ها را به‌صورت جداپذیر انتخاب می‌کنیم. سپس با انتخاب حالت‌های مختلف میدان، میزان درهم‌تنیدگی حالت اتمی را بر حسب پارامترهای موجود در مسئله به‌دست می‌آوریم. حالت خروجی اتم-میدان با استفاده از رابطه (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\Psi_{atoms-field}(t)\rangle &= U|\Psi_{atoms}(0)\rangle|\Psi_{field}(0)\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a(n)|00\rangle + b(n)|01\rangle + c(n)|10\rangle + d(n)|11\rangle)|n\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

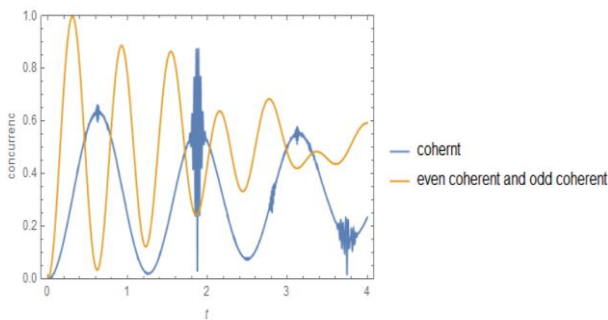
که در آن  $|\Psi_{atoms}(0)\rangle$  حالت اولیه اتمی و  $|\Psi_{field}(0)\rangle$  حالت اولیه میدان هستند. حالت اولیه اتمی را به‌گونه‌ای در نظر گرفتیم که دو اتم دوترازه در حالت پایه خود قرار گرفته‌باشند. این حالت کاملاً جداپذیر در نمایش دیراک به‌صورت  $|00\rangle$  است. حالت خروجی اتمی با گرفتن رد بر روی حالت میدان بدست می‌آید. یکی از معیارهای درهم‌تنیدگی توافق می‌باشد که به‌صورت زیر بدست می‌آید [۶]:

$$C = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)d(n) - b(n)c(n)| \quad (4)$$

است. اینک توافق حالت خروجی اتمی را برای میدانهای همدوس، همدوس زوج و همدوس فرد ورودی محاسبه و بیشینه آن را بر حسب پارامترهای  $g$ ،  $\theta$ ،  $\omega$  و  $\omega_0$  بهینه می‌کنیم. لازم به ذکر است که این پارامترهای بهینه شده را با نرم‌افزار متمتیکا به دست آورده‌ایم. به این صورت که مقادیر پارامترهای بهینه شده برای هر حالت ورودی میدان، کمترین مقدار ممکن برای داشتن بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی می‌باشد. در شکل‌های ۱ و ۲ توافق حالت خروجی اتمی را به ترتیب بر حسب پارامتر همدوسی و زمان، برای حالت ورودی میدان همدوس، همدوس زوج و همدوس فرد با نرم‌افزار متمتیکا رسم کرده‌ایم.



شکل ۱: درهم‌تنیدگی حالت خروجی اتمی بر حسب پارامتر همدوسی برای حالت ورودی همدوس به ازای  $\omega = \omega_a = ۶۷۷۶۷$ ،  $\omega = ۱$ ،  $g = ۱۴۸۸۳۳$ ،  $\theta = ۱$  و  $t = ۶۲۸۶۰۸$ ، برای حالت ورودی همدوس زوج به ازای  $\theta = ۱$ ،  $\omega = \omega_a = ۳۰۸۸۱۶$  و  $g = t = ۳۰۸۸۱۶$  و حالت ورودی همدوس فرد به ازای  $\theta = ۱$ ،  $\omega = \omega_a = ۳۰۸۸۰۲$  و  $g = t = ۳۰۸۸۰۲$ .



شکل ۲: درهم‌تنیدگی حالت خروجی اتمی بر حسب زمان برای حالت ورودی همدوس به ازای  $\omega = \omega_a = ۶۷۷۶۷$ ،  $\omega = ۱$ ،  $g = ۱۴۸۸۳۳$ ،  $\theta = ۱$  و  $\alpha = ۴۱۴۱$ ، برای حالت ورودی همدوس زوج به ازای  $\theta = ۱$ ،  $\omega = \omega_a = ۳۰۸۸۱۶$ ،  $g = ۲۵۴۹۲$  و  $\alpha = ۸$  و حالت ورودی همدوس فرد به ازای  $\theta = ۱$ ،  $\omega = \omega_a = ۳۰۸۸۰۲$  و  $\alpha = ۲۵۵۶۸$ .

در صورتی که حالت میدان ورودی، حالت همدوس باشد، داریم:

$$a(n) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n\omega - \omega_0)t} \cos^2 gt\sqrt{n}$$

$$b(n) = -ie^{i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} e^{-in\omega} \cos gt\sqrt{n} \sin gt\sqrt{n+1}$$

$$c(n) = -ie^{i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} e^{-in\omega} \cos gt\sqrt{n+1} \sin gt\sqrt{n+1}$$

$$d(n) = -e^{2i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} e^{-i(n\omega + \omega_0)t} \sin gt\sqrt{n+1} \sin gt\sqrt{n+2} \quad (۵)$$

حالت‌های همدوس زوج و فرد از برهم‌نهی حالت‌های همدوس ساخته می‌شوند و دارای خواص غیر کلاسیکی بیشتری نسبت به حالت همدوس هستند. این حالت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$|\alpha\rangle_e = \frac{1}{\sqrt{\cosh|\alpha|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle$$

$$|\alpha\rangle_o = \frac{1}{\sqrt{\sinh|\alpha|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \quad (۶)$$

که در آن  $|\alpha\rangle_e$  حالت همدوس زوج،  $|\alpha\rangle_o$  حالت همدوس فرد و  $\alpha$  پارامتر همدوسی است. در صورتی که از حالت‌های رابطه (۶) به عنوان حالت میدان اندرکنش کننده با اتم‌ها در درون کاواک استفاده شود، ضرایب رابطه (۳) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a(n)_{(e)} = N_{(e)} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (1 \pm (-1)^n)$$

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n\omega - \omega_0)t} \cos^2 gt\sqrt{n}$$

$$b(n)_{(e)} = -iN_{(e)} e^{i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (1 \pm (-1)^{n+1})$$

$$\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} e^{-in\omega} \cos gt\sqrt{n} \sin gt\sqrt{n+1}$$

$$c(n)_{(e)} = -iN_{(e)} e^{i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (1 \pm (-1)^{n+1})$$

$$\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} e^{-in\omega} \cos gt\sqrt{n+1} \sin gt\sqrt{n+1}$$

$$d(n)_{(e)} = -N_{(e)} e^{2i\theta} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} (1 \pm (-1)^{n+2})$$

$$\frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{(n+2)!}} e^{-i(n\omega + \omega_0)t} \sin gt\sqrt{n+1} \sin gt\sqrt{n+2} \quad (۷)$$

که در آن

$$N_{(e)} = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2\alpha^2})}} \quad (۸)$$

مشاهده گردید در صورت استفاده از حالت‌های غیر گاوسی میدان، یعنی حالت‌های همدوس زوج و فرد، در مقایسه با حالت همدوس معمولی بیشینه درهم‌تنیدگی بیشتری در حالت‌های اتمی به وجود می‌آید. همچنین درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی خروجی در صورت استفاده از حالت‌های همدوس زوج و فرد یکسان است. به علاوه درهم‌تنیدگی حالت خروجی اتمی تابعی متناوب بر حسب زمان است. در برخی از زمان‌ها درهم‌تنیدگی حالت همدوس بیش از حالت همدوس زوج و فرد است اما در این زمان‌ها درهم‌تنیدگی به شدت وابسته به زمان است و با تغییر اندکی در طول کاواک افت و خیز درهم‌تنیدگی بسیار زیاد است. از این رو انتخاب حالت‌های همدوس زوج و همدوس فرد به عنوان میدان ورودی مختلف برای درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی در مدل تاویس-کامینگز انتخاب مناسبی است.

### مرجع‌ها

- Li, J., et al., Semideterministic entanglement between a single photon and an atomic ensemble. Phys. Rev. Lett, ۲۰۱۹. Vol. ۱۲۳, No. ۱۴, p. ۱۴۰۵۰۴.
- Shore, B.W. and P.L. Knight, The jaynes-cummings model. J. Mod. Opt, ۱۹۹۳. Vol. ۴۰, No. ۷, p. ۱۱۹۵.
- Ghoreishi, S., M. Sarbishaei, and K. Jvidan, Entanglement between two Tavis-Cummings systems with  $N=2$ . Int. J. Theor. Math. Phys, ۲۰۱۲. Vol. ۲, No. ۶, p. ۱۸۷.
- Restrepo, J. and B.A. Rodríguez, Dynamics of entanglement and quantum discord in the Tavis-Cummings model. J. Phys. B, ۲۰۱۶. Vol. ۴۹, No. ۱۲, p. ۱۲۵۵۰۲.
- Dong, C.-h. and Y.-l. Zhang, Entanglement of atoms in Tavis-Cummings model. J. Shanghai University (English Edition), ۲۰۰۶. Vol. ۱۰, No. ۳, p. ۲۱۵.
- Audretsch, J., Entangled systems: new directions in quantum physics. ۲۰۰۸: John Wiley & Sons.

همانگونه که از شکل‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود درهم‌تنیدگی حالت‌های اتمی در صورتی که حالت‌های میدان ورودی همدوس زوج و فرد باشند بسیار نزدیک به هم می‌باشند به طوری که در این شکل‌ها روی هم افتاده‌اند. به علاوه از شکل ۱ مشخص است که استفاده از حالت‌های میدان همدوس زوج و فرد منجر به درهم‌تنیدگی بیشتر حالت‌های اتمی می‌شود. در جدول ۱ مقدار بیشینه توافق حالت‌های اتمی خروجی با پارامترهای بهینه‌سازی شده برای میدان‌های ورودی همدوس، همدوس زوج و همدوس فرد در مدل تاویس-کامینگز یک کاواک را آورده‌ایم. همانگونه که در شکل ۲ نیز مشاهده می‌شود درهم‌تنیدگی حالت خروجی اتمی برای میدان‌های همدوس، همدوس زوج و همدوس فرد به صورت تناوبی تغییر می‌کند و بیشینه توافق برای حالت‌های ورودی میدان همدوس زوج و فرد بیشتر از بیشینه توافق حالت همدوس است.

جدول ۱: مقدار بیشینه توافق حالت‌های اتمی خروجی با پارامترهای بهینه‌سازی شده برای میدان‌های ورودی در مدل تاویس-کامینگز

حالت اولیه میدان	مقدار بیشینه توافق
همدوس	۰٫۶۶۴۵۵۶
همدوس زوج	۰٫۹۹۸۷۶۴
همدوس فرد	۰٫۹۹۸۷۶۵

### نتیجه‌گیری

در این مقاله از مدل تاویس-کامینگز برای درهم‌تنیده نمودن حالت‌های اتمی جداپذیر استفاده شد. به طور خاص دو اتم دو ترازه را با یک مد میدان تحت هامیلتونی تاویس-کامینگز قرار دادیم و درهم‌تنیدگی حالت خروجی اتمی را با استفاده از پارامترهای مسئله و تغییر میدان‌های تک مدی ورودی بررسی کردیم.