



بیست و هفتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و سیزدهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.
۱۴-۱۶ بهمن ۱۳۹۹



کد مقاله : ۲-۲۲۳۰-۱۰-A

دینامیک خواص غیر کلاسیکی در مدل جینز-کامینگز دو مده

یاسنا، علی شمسی، سودا، میرزائی و علیرضا، چناقلو

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز

yasna.alishamsi75@gmail.com

s.mirzaei@sut.ac.ir

a.chenaghlou@sut.ac.ir

چکیده- در این مقاله، مدل جینز-کامینگز دومده یعنی یک سامانه شامل یک کاواک دو مده در حال اندرکنش با یک اتم دو ترازه را در نظر خواهیم گرفت. با حل معادله‌ی شرودینگر وابسته به زمان تابع موج سیستم اتم-میدان را در زمان t بدست آورده و برخی خواص کوانتومی سیستم را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بویژه دینامیک وارونی جمعیت اتمی و درهم‌تنیدگی کوانتومی بررسی خواهد شد و بدین منظور از سنجی آنتروپی فون نیومن استفاده خواهیم نمود. ظهور مشخصه‌های غیر کلاسیکی در طول تحول سیستم با استفاده از پارامتر مندل نشان داده خواهد شد. در پایان همپوشانی حالت اولیه و حالت تحول زمانی یافته با استفاده از فیدلیتی بررسی خواهد شد.

کلید واژه- آنتروپی فون نیومن، پارامتر مندل، درهم‌تنیدگی، فیدلیتی، مدل جینز-کامینگز دومده

Dynamics of nonclassical Properties in Two-Mode Jaynes-Cummings Model

Yasna Alishamsi, SevdMirzaei, AlirezaChenaghlou

Department of Physics, Faculty of Basic Sciences, Sahand University of Technology, Tabriz

Abstract- In this article, we consider the two-mode Jaynes-Cummings model i.e. a system consists of a two-mode cavity interacting with a two-level atom. Based on the solution of time-dependent Schrodinger equation, we obtain the wave function of the atom-field system and study some quantum properties of the system. Specially, dynamics of the atomic population inversion and quantum entanglement will be investigated and to reach this aim, we use the von-Neumann entropy measure. Appearance of nonclassical features during the evolution of the system is shown using Mandel parameter. Finally, the overlap of initial and time-evolved states will be explored using the fidelity.

Keywords: von-Neumann entropy, Mandel parameter, Entanglement, Fidelity, Two-mode Jaynes-Cummings model

$$\hat{U}(t) = \exp\left[-\frac{i\hat{H}_1 t}{\hbar}\right] \quad (۳)$$

با اثر دادن عملگر تحول زمانی روی حالت اولیه‌ی سیستم، حالت سیستم اتم-میدان را می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1} C_{n_2} \{a_{n_1, n_2} |e, n_1, n_2\rangle + b_{n_1+1, n_2-1} |g, n_1+1, n_2-1\rangle\} \quad (۴)$$

که در آن:

$$a_{n_1, n_2} = \cos[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (۵)$$

$$b_{n_1+1, n_2-1} = \sin[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (۶)$$

ماتریس چگالی حالت تحول زمانی یافته عبارت است از:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \quad (۷)$$

با توجه به اینکه $P_n = |C_n|^2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \{ |a_{n_1, n_2}|^2 |e, n_1, n_2\rangle\langle e, n_1, n_2| + \\ & |b_{n_1+1, n_2-1}|^2 |g, n_1+1, n_2-1\rangle\langle g, n_1+1, n_2-1| \\ & + a_{n_1, n_2} b_{n_1+1, n_2-1}^* |e, n_1, n_2\rangle\langle g, n_1+1, n_2-1| + \\ & b_{n_1+1, n_2-1} a_{n_1, n_2}^* |g, n_1+1, n_2-1\rangle\langle e, n_1, n_2| \} \end{aligned} \quad (۸)$$

برای محاسبه‌ی ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی میدان، روی حالت اتم رد جزئی می‌گیریم، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F(t) = & \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \{ |a_{n_1, n_2}|^2 |n_1, n_2\rangle\langle n_1, n_2| \\ & + |b_{n_1+1, n_2-1}|^2 |n_1+1, n_2-1\rangle\langle n_1+1, n_2-1| \} \end{aligned} \quad (۹)$$

که شکل ماتریسی آن بصورت زیر است:

$$\hat{\rho}_F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} |a_{n_1, n_2}|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} |b_{n_1+1, n_2-1}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۰)$$

مقدمه

خواص غیرکلاسیکی میدان‌های تابشی یکی از موضوعات مهم در اپتیک کوانتومی است که در حوزه‌ی اطلاعات کوانتومی نظیر رمزنگاری کوانتومی، محاسبات کوانتومی، دوربری کوانتومی و ... توجه محققان بسیاری را به خود جلب کرده است. یکی از ویژگی‌های شاخص مکانیک کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی است که به عنوان همبستگی یا ارتباط بین حالت‌های کوانتومی مطرح شده است [۱]. یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای تولید درهم‌تنیدگی در اپتیک کوانتومی مدل جینز-کامینگز می‌باشد [۲]. در این مقاله مدل جینز-کامینگز دومده بصورتیک سامانه شامل یک کاواک دومده در حال اندرکنش با یک اتم دوترازه را در نظر می‌گیریم [۳]. ویژگی‌های غیرکلاسیکی سیستم را با استفاده از مفهوم وارونی جمعیت اتمی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، پارامتر مندل و فیدلیتی بررسی می‌کنیم.

توصیف مدل

یک سامانه شامل یک کاواک دو مده در حال اندرکنش با یک اتم دوترازه را در نظر می‌گیریم. هامیلتونی مناسب برای چنین سامانه‌ای بصورت زیر توصیف می‌شود [۳]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \\ & + \hbar g (\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 \hat{\sigma}_+ + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \hat{\sigma}_-) \end{aligned} \quad (۱)$$

که عملگرهای اتمی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \sigma_- = |g\rangle\langle e|$$

$$\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$$

در ابتدا فرض می‌کنیم اتم در حالت برانگیخته‌ی $|e\rangle$ باشد،

آنگاه حالت اولیه‌ی سیستم اتم-میدان بصورت

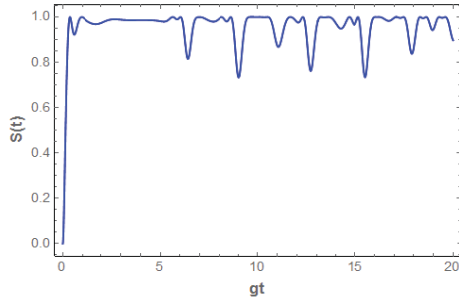
$$|\psi_0\rangle = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1} C_{n_2} |e, n_1, n_2\rangle \quad (۲)$$

می‌باشد که n_1 و n_2 به ترتیب تعداد فوتون‌ها در مد ۱ و ۲ میدان را نشان می‌دهند. می‌دانیم که عملگر تحول زمانی برابر است با:

$$\lambda_1 = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \cos^2[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (16)$$

$$\lambda_2 = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \sin^2[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}]$$

با جایگذاری روابط اخیر در رابطه‌ی (۱۵)، آنتروپی فون نیومن را بدست آورده و نمودار آن را بصورت تابعی از زمان مقیاس بندی شده‌ی gt در شکل ۲ رسم می‌کنیم.



شکل ۲: نمودار آنتروپی فون نیومن به ازای $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$

در شکل ۲ نمودار آنتروپی فون نیومن برای حالت همدوس میدان رسم شده است، ملاحظه می‌شود در زمان $t = 0$ ، آنتروپی برابر صفر است که نشان می‌دهد سیستم اتم-میدان جداپذیر است و با گذر زمان مقدار درهم‌تنیدگی در برخی از زمان‌ها به مقدار بیشینه‌ی خود $S_{\max} = 1$ می‌رسد.

پارامتر مندل

یکی از سنج‌های مهم برای مطالعه‌ی ویژگی‌های آماری هر حالت کوانتومی پارامتر مندل می‌باشد که میزان انحراف توزیع حالت‌ها را از آمار پواسونی نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$Q = \frac{\langle (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle} - 1 \quad (17)$$

بطوریکه $Q > 0$ توزیع ابرپواسونی (حالت کلاسیکی)، $Q < 0$ توزیع زیرپواسونی (حالت غیرکلاسیکی) و $Q = 0$ توزیع پواسونی (حالت همدوس) را نشان می‌دهد. با رد جزئی گرفتن روی مد ۲ میدان از ماتریس چگالی (۸)، ماتریس چگالی کاهش یافته عبارت است از:

دینامیک وارونی جمعیت اتمی

وارونی جمعیت اتمی، اختلاف احتمال حضور اتم در دو تراز برانگیخته و پایه می‌باشد که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۳]:

$$W(t) = \rho_{ee} - \rho_{gg} \quad (11)$$

با توجه به رابطه‌ی (۸) داریم:

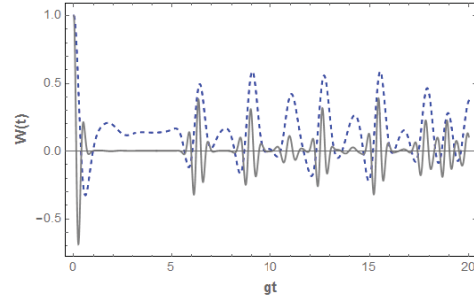
$$\rho_{ee}(t) = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \cos^2[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (12)$$

$$\rho_{gg}(t) = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \sin^2[gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (13)$$

با جایگذاری روابط اخیر در معادله‌ی (۱۱) خواهیم داشت:

$$W(t) = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \cos[2gt\sqrt{(n_1+1)n_2}] \quad (14)$$

با فرض اینکه میدان کاواک ابتدا در حالت همدوس باشد یعنی $P_{n_i} = \exp[-\bar{n}_i] \frac{\bar{n}_i^{n_i}}{n_i!}$, $i = 1, 2$ می‌توان نمودار دینامیک وارونی جمعیت اتمی را بصورت تابعی از زمان مقیاس بندی شده‌ی gt رسم نمود (شکل ۱).



شکل ۱: نمودار دینامیک وارونی جمعیت اتمی

خط چین به ازای $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$ و خط پر به ازای $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 6$

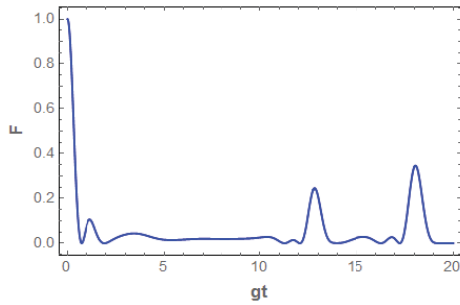
از شکل ۱ ملاحظه می‌شود که وارونی جمعیت اتمی بین مقادیر مثبت و منفی رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهد.

دینامیک درهم‌تنیدگی اتم-میدان

آنتروپی فون نیومن یکی از سنج‌های درهم‌تنیدگی می‌باشد که از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۴]:

$$S(t) = - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (15)$$

بطوریکه λ_i ها ویژه مقادیر ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی (۱۰) هستند:

شکل ۴: نمودار فیدلیتی به ازای $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$

با توجه به شکل ۴ ملاحظه می‌شود که در زمان اولیه، فیدلیتی $F_{\max} = 1$ و با گذر زمان همپوشانی حالت اولیه و تحول زمانی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک سامانه شامل یک کاواک دو مده در حال اندرکنش با یک اتم دو ترازه را در نظر گرفتیم. با حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، حالت سیستم اتم-میدان را بدست آوردیم و برخی از خواص کوانتومی سیستم از جمله وارونی جمعیت اتمی را محاسبه کردیم و نمودار آن را به ازای مقادیر دلخواه \bar{n}_1 و \bar{n}_2 رسم کردیم. ملاحظه شد که وارونی جمعیت اتمی بین مقادیر مثبت و منفی رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهد. همچنین درهم‌تنیدگی سیستم اتم-میدان را با استفاده از سنجی آنتروپی فون نیومن بدست آوردیم. از نمودار آنتروپی بر حسب زمان مقیاس بندی شده ملاحظه می‌شود که درهم‌تنیدگی در ابتدا صفر است و با گذر زمان رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهد و در بعضی زمان‌ها به بیشینه مقدار خود $S_{\max} = 1$ می‌رسد. به منظور مطالعه ویژگی‌های آماری سیستم اتم-میدان از پارامتر مندل استفاده شد که ملاحظه می‌شود که در برخی زمان‌ها پارامتر مندل مقدار منفی شده و آمار زیر پواسونی از خود نشان می‌دهد. همپوشانی حالت اولیه و حالت تحول زمانی یافته نیز نشان دهنده رفتار غیرتناوبی با زمان می‌باشد.

$$\hat{\rho}_{AF_{n_1}}(t) = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \left\{ |a_{n_1, n_2}|^2 |e, n_1\rangle \langle e, n_1| \right. \quad (18)$$

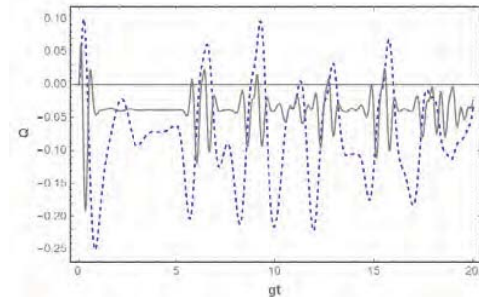
$$\left. + |b_{n_1+1, n_2-1}|^2 |g, n_1+1\rangle \langle g, n_1+1| \right\}$$

آنگاه داریم:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \left\{ n_1 \cos^2[gt \sqrt{(n_1+1)n_2}] \right. \quad (19)$$

$$\left. + (n_1+1) \sin^2[2gt \sqrt{(n_1+1)n_2}] \right\}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (۱۷) پارامتر مندل را بدست آورده و نمودار پارامتر مندل را در شکل ۳ رسم می‌کنیم.



شکل ۳: نمودار پارامتر مندل

شکل ۳: نمودار پارامتر مندل $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 6$ و خط پر به ازای $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 2$ خط چین به ازای

با توجه به شکل ۳ درمی‌یابیم که نمودار پارامتر مندل در طول تحول خود در بازه‌های مختلف زمان، رفتار غیرکلاسیکی از خود نشان می‌دهد.

فیدلیتی

به منظور مطالعه‌ی همپوشانی حالت‌های اتم-میدان در زمان‌های $t=0$ و هر زمان دلخواه t ، فیدلیتی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۶]:

$$F = \left| \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \right|^2 \quad (20)$$

بطوریکه $0 \leq F \leq 1$ به ازای $F=1$ حالت اولیه و تحول زمانی یافته بیشترین همپوشانی را دارند و به ازای $F=0$ حالت‌ها برهم متعام می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲) و (۴)، فیدلیتی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$F = \sum_{n_1, n_2} P_{n_1} P_{n_2} \cos^2[gt \sqrt{(n_1+1)n_2}]^2 \quad (21)$$

در شکل ۴، رفتار فیدلیتی بصورت تابعی از زمان مقیاس بندی شده‌ی gt رسم شده است.

مرجع‌ها

[3] S. Singh and A. Sinha; “Solutions of two-mode Jaynes–Cummings models”; *Phys.* **70** (5) (2008) 887900.

[4] J. Von Neumann; “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics Princeton”; *Princeton University Press* (1955).

[5] L. Mandel, E. Wolf; “Optical Coherence and Quantum Optics”; *Cambridge university Press* (1995).

[6] R. Jozsa; “Fidelity for mixed quantum states”; *J. Mod. Opt.* **41** (1994) 2315.

[1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen; “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”; *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.

[2] E.T. Jaynes and F.W. Cummings; “Comparison of quantum and semi classical radiation theories with application to beam maser”; *Proc. IEEE* **51** (1963).