بیست و هفتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و سیزدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه سیستان و بلوچستان،
زاهدان، ایران.
۱۴-۱۶ بهمن ۱۳۹۹

کد مقاله : A-۱۰-۱۰-۱۳-۱

دینامیک درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت برهم‌کنش دو کیوبیت با یک میدان کوانتیده دومد: بدون تقریب موج چرخان

فرشید جهان بخش، محمدکاظم توسلی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

f.jahanbakhsh@stu.yazd.ac.ir

mktavassoly@yazd.ac.ir

چکیده – در این مقاله، با در نظرگرفتن برهم‌کنش بین دو کیوبیت با یک میدان کوانتیده دومد در یک کاواک با ضریب کیفیت بالا و در غیاب تقریب موج چرخان، معادله شرودینگر وابسته به زمان را برای سامانه‌ی موردنظر حل می‌کنیم. سپس دو کمیت تلاقی (به منظور بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی) و همچنین وارونی جمعیت (به منظور ارزیابی آهنگ تبادل انرژی بین اتم‌ها و میدان) را برای سامانه محاسبه و بررسی می‌کنیم. نتایج عددی ما نشان می‌دهد که مرگ و سپس تولد درهم‌تنیدگی در بعضی موارد اتفاق می‌افتد. همچنین پدیده‌های فروافت-احیاء نیز برای هر دو کمیت بررسی‌شده قابل مشاهده است، که تعداد فروافت و احیاءها با انتخاب مقادیر مختلف پارامترهای موثردر مدل موردنظر می‌تواند افزایش یا کاهش یابد.

کلید واژه- تلاقی، تقریب موج چرخان، مدل جینز-کامینگز، درهم‌تنیدگی کوانتومی، وارونی جمعیت.

Entanglement dynamics and population inversion of two qubits interacting with a two-mode quantized field: beyond the rotating wave approximation

F. Jahanbakhsh, M. K. Tavassoly

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper, we solve the time-dependent Schrödinger equation for the desired system by considering the interaction between two qubits with a two-mode quantized field in a high-quality cavity and in the absence of rotating wave approximation. Then we calculate and examine two quantitiesconcurrence (in order to investigate the entanglement dynamics) as well as population inversion (in order to evaluate the rate of energy exchange between atoms and the field) for the system. Our numerical results show that death and then birth of entanglement occur in some cases. Also, collapse-revivalphenomenacan be observed for both quantities investigated, that the number of collapse and revivals can be increased or decreased by choosing different values of the effective parameters in the desired model.

Keywords: Concurrence, Rotating wave approximation,Jaynes-Cummings model,Quantum entanglement, Population inversion.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

مقدمه

اخیرا درهم‌تنیدگی کوانتومی به عنوان یکی از جالب‌ترین جنبه‌های غیرکلاسیک مکانیک کوانتومی، اهمیت ویژه‌ای در حوزه علوم و فناوری اطلاعات کوانتومی پیدا کرده است [۱]. از مهم‌ترین و درعین‌حال ساده‌ترین روش‌های تولید درهم‌تنیدگی کوانتومی می‌توان به مدل استاندارد جینز-کامینگز اشاره کرد که هامیلتونی مربوط به برهم‌کنش یک کیوبیت در یک میدان کوانتیده تک‌مد را در حضور تقریب موج چرخان معرفی می‌کند[۲]. به دلیل اینکه تقریب موج چرخان تنها در شرایط جفت‌شدگی اتم-میدان ضعیف معتبر است، بنابراین در شرایط جفت‌شدگی قوی دیگر نمی‌توان از این تقریب استفاده کرد. در این شرایط به دلیل اضافه‌شدن جملات آنتی جینز-کامینگز، معادلات به صورت تحلیلی قابل حل نخواهند بود. بااین‌حال، اخیرا برای یک اتم دوترازی در برهم‌کنش با یک میدان تک‌مد بدون تقریب موج چرخان روش تحلیلی مناسبی براساس نظریه اختلال ارائه شده است[۳]. در مقاله حاضر، با الگو گرفتن از این روش و تعریف یک هامیلتونی موثر وابسته به شدت برای برهم‌کنش دو کیوبیت با یک میدان دومد، معادله شرودینگر وابسته به زمان را حل و سپس دینامیک درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت سامانه موردنظر را بررسی می‌کنیم. تاکنون تعمیم‌های فراوانی به مدل جینز-کامینگز داده شده، اما تا آنجا که ما می‌دانیم، مدل مطرح شده در این مقاله تاکنون انجام نشده است.

مدل فیزیکی سامانه

به عنوان تعمیمی از کار صورت‌گرفته در مرجع[۳]، سامانه‌ای از دو کیوبیت با ترازهای برانگیخته $|e\rangle$ و پایه $|g\rangle$ در برهم‌کنش با یک میدان کوانتیده دومد را در نظر می‌گیریم. هامیلتونی مربوط به این سامانه بدون تقریب موج چرخان به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hat{H}_{free} + \hat{H}_{JC} + \hat{H}_{CRT}$$

به طوریکه:

$$\hat{H}_{free} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\omega_i\hat{\sigma}_z^i + \nu_i\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right)$$

$$\hat{H}_{JC} = \sum_{i=1}^{2} g_i\left(\hat{a}_i\hat{\sigma}_i^+ + \hat{a}_i^\dagger\hat{\sigma}_i^-\right)$$

$$\hat{H}_{CRT} = \sum_{i=1}^{2} g_i\left(\hat{a}_i^\dagger\hat{\sigma}_i^+ + \hat{a}_i\hat{\sigma}_i^-\right)$$

که $\hat{a}_i^\dagger(\hat{a}_i)$ عملگر بوزونی آفرینش (نابودی) متناظر با هر کدام از مدهای مربوط به میدان‌هاو همچنین $\hat{\sigma}_i^+(\hat{\sigma}_i^-)$ و $\hat{\sigma}_z^i$ عملگر بالابرنده (پایین‌آورنده) اتمی و وارونی جمعیت می‌باشند. ضمنا $\omega_i(\nu_i)$بسامد iمین اتم (مد میدان) و g_i نیز ضریب جفت‌شدگی اتم-میدان است. هامیلتونی $\hat{H}_{CRT}$ شامل جملات ضد چرخش است که در شرایط بدون تقریب موج چرخان به هامیلتونی جینز-کامینگز اضافه شده است. با الهام‌گرفتن از [۳] می‌توان به هامیلتونی موثر زیر برای سامانه موردنظر رسید:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_{free} + \sum_{i=1}^{2}\left[f(\hat{n}_i)\hat{a}_i^\dagger\hat{\sigma}_i^- + \hat{\sigma}_i^+\hat{a}_i f(\hat{n}_i)\right]$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i g_i\left\{\hat{\sigma}_z^i(\hat{n}_i+1/2)-1/2\right\}$$

که $f(\hat{n}_i) = g_i(1-\lambda_i^2\hat{n}_i)$.با مقایسه رابطه (۵) با (۳)،دیده می‌شود که ضرایب جفت‌شدگی اتم-میدان g_iبه تابع تغییرشکل‌یافته‌ی غیرخطی وابسته به شدت $f(\hat{n}_i)$ تبدیل شده است. حالت اتم-میدان اولیه را به صورت زیر برای دو اتم و دو مد میدان در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(0)\rangle = \cos\alpha|e,e,0,0\rangle + \sin\alpha|g,g,0,0\rangle$$

که در آن پارامتر αزاویه همدوس اتمی است. با توجه به شرایط اولیه بالا، حالت کلی سامانه موردنظر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle = {} & x_1(t)|e,e,0,0\rangle + x_2(t)|e,g,1,0\rangle \\ & + x_3(t)|e,g,0,1\rangle + x_4(t)|g,e,1,0\rangle \\ & + x_5(t)|g,e,0,1\rangle + x_6(t)|g,g,1,1\rangle \\ & + x_7(t)|g,g,2,0\rangle + x_8(t)|g,g,0,2\rangle \\ & + x_9(t)|g,g,0,0\rangle\end{aligned}$$

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

اکنون ما با استفاده از هامیلتونی $\hat{H}_{eff}$ در معادله (۵) معادله شرودینگر وابسته به زمان $\hat{H}_{eff}|\psi(t)\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$ را با درنظرگرفتن زمان مقیاس‌بندی‌شده $\tau = \frac{2g_1 t}{\pi}$ حل خواهیم کرد، در این مسیر به ۹ معادله دیفرانسیل جفت‌شده می‌رسیم که با حل آنها حالت کلی سامانه به‌دست می‌آید.

میزان درهم‌تنیدگی

ماتریس چگالی کاهش‌یافته دو کیوبیت در سامانه موردنظر را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\hat{\rho}_{A_1A_2}(\tau) = Tr_{F_1,F_2}[\hat{\rho}(\tau)]$$

که $\hat{\rho}(\tau) = |\psi(\tau)\rangle\langle\psi(\tau)|$.

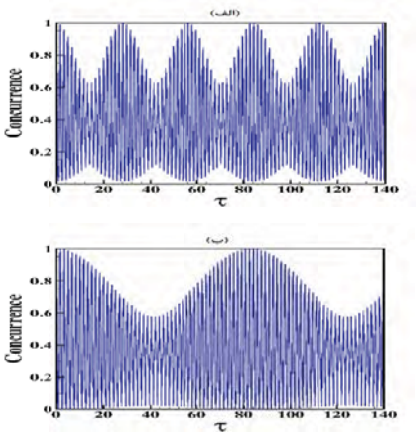
از این پس به بررسی درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت با استفاده از سنجه‌ی تلاقی می‌پردازیم[۴]. این کمیت از صفر (حالت جداپذیر) تا یک (بیشینه درهم‌تنیدگی) می‌تواند تغییر کند. اگر ماتریس چگالی کاهش‌یافته دو کیوبیت به صورت زیر باشد [۵]:

$$\hat{\rho}_{A_1A_2}(\tau) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & w \\ 0 & y & u & 0 \\ 0 & u^* & z & 0 \\ w^* & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

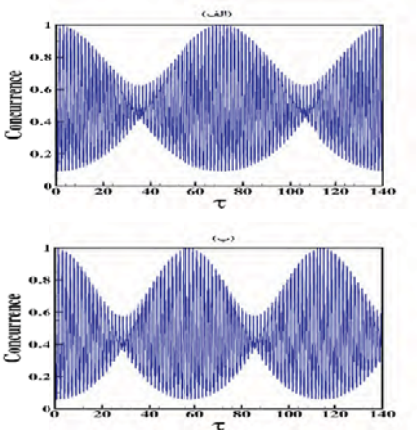
سنجه تلاقی برای دو کیوبیت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C[\hat{\rho}_{A_1A_2}(\tau)] = 2\max\left\{0, |u| - \sqrt{xt}, |w| - \sqrt{yz}\right\}$$

می‌توان میزان درهم‌تنیدگی دو کیوبیت را برای سامانه موردنظر بررسی کرد. شکل‌های ۱ و ۲ را با دو زیر شکل الف) با تقریب موج چرخان ب) بدون تقریب موج چرخان، به ازای زاویه همدوسی $\alpha = \pi/4$ و پارامترهای مختلف موثر در درهم‌تنیدگی سامانه رسم می‌کنیم. نتایج حاصل از رسم شکل‌ها نشان می‌دهد که در زمان صفر حداکثر میزان درهم‌تنیدگی را می‌توان مشاهده کرد. پس از گذشت زمان مجددا در بعضی از زمان‌ها می‌توان حداکثر درهم‌تنیدگی را مشاهده کرد. همچنین پدیده‌های فروافت-احیاء به راحتی



شکل ۱: درهم‌تنیدگی دو کیوبیت برای زاویه همدوسی $\alpha = \pi/4$ برحسب زمان مقیاس‌بندی‌شده τ با $\nu_1/g_1 = 3$، $\nu_2/g_1 = 2$، $\omega_1/g_1 = 1.4$، $\omega_2/g_1 = 1.7$، $g_2/g_1 = 1.2$؛ الف) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$، ب) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$.



شکل ۲: درهم‌تنیدگی دو کیوبیت برای زاویه همدوسی $\alpha = \pi/4$ برحسب زمان مقیاس‌بندی‌شده τ با $\nu_1/g_1 = 3.25$، $\nu_2/g_1 = 2.5$، $\omega_1/g_1 = 1.65$، $\omega_2/g_1 = 1.25$، $g_2/g_1 = 1.15$؛ الف) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$، ب) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$.

قابل مشاهده است. علاوه‌براین با مقایسه زیرشکل‌های مربوط به هرکدام از شکل‌های ۱ و ۲، می‌توان دید که تعداد پدیده‌های فروافت-احیاء در حضور جملات ضد چرخش به‌ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. همچنین در شکل ۱ مرگ و سپس تولد درهم‌تنیدگی رخ می‌دهد، به طوریکه در شکل ۲ درهم‌تنیدگی هیچگاه صفر نشده است.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترس باشد.

وارونی جمعیت

وارونی جمعیت به ما اطلاعاتی در مورد آهنگ تبادل انرژی بین اتم ها و میدان می‌دهد و با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

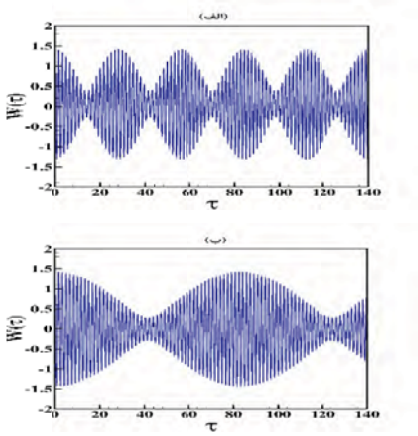
$$W(\tau)=Tr[\hat{\rho}_{A_1}(\tau)\hat{\sigma}_z]+Tr[\hat{\rho}_{A_2}(\tau)\hat{\sigma}_z]$$

که $\hat{\sigma}_z$ ماتریس پائولی می‌باشد.

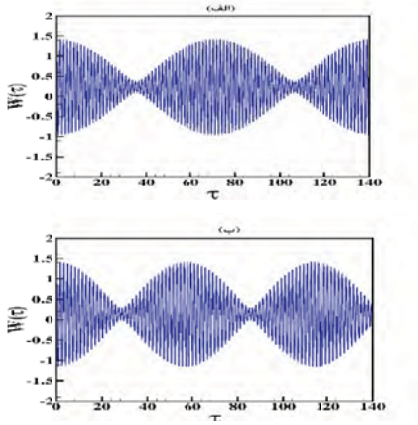
با به‌دست‌آوردن ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته اتم اول $\hat{\rho}_{A_1}(\tau)$ و اتم دوم $\hat{\rho}_{A_2}(\tau)$ و سپس قراردادن در رابطه بالا وارونی جمعیت را می‌توان محاسبه کرد. با رسم شکل‌های ۳ و ۴، وارونی جمعیت مربوط به دو کیوبیت را به ازای زاویه همدوسی $\alpha=\pi/8$ برحسب زمان مقیاس‌بندی‌شده τ بررسی خواهیم کرد. نتایج عددی نشان می‌دهد که پدیده‌های فروافت-احیاء مانند کمیت تلاقی برای وارونی جمعیت نیز قابل مشاهده هستند. همچنین با مقایسه‌ی زیرشکل‌های مربوط به شکل‌های ۳ و ۴ می‌توان دید که تعداد پدیده‌های فروافت-احیاء در حضور جملات ضد چرخش به‌ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. نکته قابل توجه این است که در مدل جینز-کامینگز که برهمکنش یک اتم با یک میدان کوانتیده تک‌مد را شرح می‌دهد در صورتی که اتم در حالت اولیه $|e,0\rangle$ یا حتی $|e,n\rangle$ قرار داشته باشد، هیچ پدیده فروافت-احیائی مشاهده نمی‌شود. با این حال، ویژگی جالب مدل ارائه‌شده این است که درصورتیکه اتم‌ها در یک برهم‌نهی از حالت‌های برانگیخته یا پایه قرارگیرند و مدهای میدان حتی در حالت خلا باشند، پدیده فروافت-احیاء ظاهر می‌گردد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با درنظرگرفتن برهم‌کنش دوکیوبیت با یک میدان کوانتیده دومد، ابتدا هامیلتونی موثر متناظر با این سامانه در غیاب تقریب موج چرخان را تعریف و سپس معادله شرودینگر وابسته به زمان متناظر را حل کردیم. سپس دینامیک درهم‌تنیدگی و وارونی جمعیت دو کیوبیت را محاسبه و بررسی کردیم. نتایج عددی نشان داد که پدیده‌های فروافت-احیاء برای هر دو کمیت قابل مشاهده است. همچنین مرگ و سپس تولد درهم‌تنیدگی در بعضی موارد قابل مشاهده است. علاوه بر این، برای هر دو کمیت در غیاب تقریب موج چرخان تعداد پدیده‌های فروافت-احیاء تغییر خواهد کرد.



شکل۳: وارونی جمعیت دو کیوبیت برای زاویه همدوسی $\alpha=\pi/8$ برحسب زمان مقیاس‌بندی‌شده τ با پارامترهای مشابه با شکل ۱.



شکل۴: وارونی جمعیت دو کیوبیت برای زاویه همدوسی $\alpha=\pi/8$ برحسب زمان مقیاس‌بندی‌شده τ با پارامترهای مشابه با شکل ۲.

مرجع‌ها

[1] C. Weedbrook andet al., S. Lloyd,*Rev. Mod. Phys.*, **84**, No. 2, 621, 2012.
[2]F. W. Cummings,*Phys. Rev.*,**140**, A1051, 1965.
[3] M. H. Naderi,*J. Phys. A: Math. Theor.*,**44**, No. 5,055304, 2011.
[4] W. K. Wootters,*Phys. Rev. Lett.*,**80**, No. 10, 2245, 1998.
[5]T. Yu and J. H. Eberly,*Quantum Inf. Comput.*,**7**, 459, 2007.