



بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و  
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس  
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،  
دانشگاه خوارزمی،  
تهران، ایران.  
۱۶-۱۵ بهمن ۱۳۹۸



## اثر جفت‌شدگی غیرخطی اتم-میدان بر درهم‌تنیدگی یک سامانه دوکیوبیتی: رهیافت عملگر تحول زمانی وابسته به شدت

میثم، ستوده خیرآبادی، مهران، رافیعی و محمدکاظم، توسلی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

[meysam.setodeh1376@gmail.com](mailto:meysam.setodeh1376@gmail.com), [mehran.rafeie1377@gmail.com](mailto:mehran.rafeie1377@gmail.com), [mktavassoly@yazd.ac.ir](mailto:mktavassoly@yazd.ac.ir)

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی در برهم‌کنش اتم-میدان وابسته به شدت (غیرخطی) در یک کاواک اپتیکی تک‌مد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا سامانه و هامیلتونی متناظر با آن را معرفی می‌کنیم و سپس با استفاده از هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش، عملگر تحول زمانی وابسته به شدت را در پایه‌های دوکیوبیتی می‌سازیم. بر این اساس، تحول زمانی ماتریس چگالی مشخص می‌شود. با استفاده از ماتریس چگالی کاهش‌یافته، سنج تلافی را برای سامانه دوکیوبیتی محاسبه می‌کنیم. در آخر با محاسبه تلافی تاثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت را بررسی و با مورد خطی (جفت‌شدگی ثابت) مقایسه می‌کنیم. خواهیم دید که در جفت‌شدگی وابسته به شدت، در مقایسه با جفت‌شدگی ثابت به حفظ بهتر درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها دست می‌یابیم.

کلیدواژه- تلافی، جفت‌شدگی غیرخطی، درهم‌تنیدگی

### The Influence of atom-field nonlinear coupling on the two- qubit entanglement: Intensity-dependent time evolution operator approach

Meysam, Setodeh Kheirabady, Mehran, Rafeie and Mohammad Kazem, Tavassoly

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper we study the dynamics of entanglement between two qubits (two-level atoms) when the atom-field interaction is intensity-dependent, At first we determine the model and its Hamiltonian, then, using the interaction picture of the Hamiltonian, the intensity-dependent time evolution Hamiltonian operator is obtained in the basis of two qubits. Using this operator, density operator evolution is achieved. With the help of the reduced density matrix, we evaluate the concurrence measure of the two-qubits. At last, by numerical analysis, the influence of intensity-dependent coupling is investigated and compared with linear regime (constant coupling). We observe that in the case of nonlinear coupling, comparing with constant coupling, preservation of entanglement can be achieved.

Keywords: Concurrence, Entanglement, intensity dependent atom-field coupling

## مقدمه

ناجایگزیدگی (عدم موضعیّت) یکی از مشخصه‌های مکانیک کوانتومی است که معادل کلاسیکی ندارد. نمونه‌ای نوعی از ناجایگزیدگی، حالت‌های درهم‌تنیده یک سامانه دودره‌ای است که نقش مهمی در اطلاعات و محاسبات کوانتومی ایفا می‌کند [۱]. این مفهوم اولین بار توسط انیشتن، پودولسکی و روزن و در پی آن، شرودینگر مطرح شد که بعدها منجر به پایه‌گذاری نامساوی بل شد. درهم‌تنیدگی و نامساوی بل در یک کاواک اپتیکی برای اتم‌های یکسان در مرجع [۲] بررسی شده است. در این راستا، بخش قابل توجهی از پژوهش‌های جدید که در حوزه فرآیندها و فناوری‌های اطلاعات کوانتومی مورد استفاده نظری و تجربی قرار می‌گیرد، متمرکز بر تولید و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی در سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان و بررسی تحول زمانی آن‌ها است. در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی در برهم‌کنش وابسته به شدت در دو اتم دو ترازوی با یک میدان تک‌مد را با روش عملگر تحول زمانی وابسته به شدت بررسی و نهایتاً با مورد جفت‌شدگی ثابت (خطی) مقایسه می‌کنیم.

## مدل سامانه و روابط پایه

سامانه مورد مطالعه متشکل از یک سامانه درهم‌تنیده دوکیوبیتی و یک میدان اپتیکی تک‌مد با بسامد  $\omega$  است. هامیلتونی برهم‌کنش این سامانه براساس مدل تاویس-کامینگز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + i \sum_{j=1}^2 (\hat{a} g f(\hat{n}) \hat{\sigma}_j^+ - g f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_j^-), \quad (1)$$

در اینجا  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) عملگر فنا (آفرینش) میدان و  $\hat{\sigma}_j^\pm = \hat{\sigma}_j^x \pm i \hat{\sigma}_j^y$  ماتریس‌های پاولی مربوط به کیوبیت‌ها هستند.  $g f(\hat{n})$  نیز جفت‌شدگی سامانه اتم-میدان است که به وضوح وابسته به تعداد فوتون‌ها (شدت) است. در این مقاله جفت‌شدگی وابسته به شدت را با تابع غیرخطی  $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$  مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هامیلتونی برهم‌کنش در تصویر

برهم‌کنش به کمک رابطه (۲)

$$\hat{H}_I = \hat{R}(t) \hat{H} \hat{R}^\dagger(t) - i \hat{R}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^\dagger(t)$$

حاصل می‌شود:

$$\hat{H}_I = i \sum_{j=1}^2 (\hat{a} g f(\hat{n}) e^{-i\omega t} \hat{\sigma}_j^+ - g f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \hat{\sigma}_j^-), \quad (3)$$

که در آن  $\hat{R}(t)$  یک عملگر یکانی است. پایه‌های دوکیوبیتی عبارتند از:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

حال می‌توان عملگر تحول زمانی در تصویر برهم‌کنش (با جفت‌شدگی وابسته به شدت میدان) را به دست آورد:

$$\hat{U}_I(t) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

که در آن:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 - 2\hat{a}f(\hat{n}) \frac{\text{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger & \hat{a}f(\hat{n}) \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \\ -\frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger & \text{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) \end{pmatrix}$$

$$u_{12} = \begin{pmatrix} \hat{a}f(\hat{n}) \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} & 2\hat{a}f(\hat{n}) \frac{\text{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}} \hat{a}f(\hat{n}) \\ \text{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) & \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \hat{a}f(\hat{n}) \end{pmatrix}$$

$$u_{21} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger & -\text{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) \\ 2f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \frac{\text{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}} f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger & -f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = \begin{pmatrix} \text{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) & \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \hat{a}f(\hat{n}) \\ -f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \frac{\text{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} & 1 - 2f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger \frac{\text{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}} \hat{a}f(\hat{n}) \end{pmatrix}$$

که در آن  $\hat{S} = f^2(\hat{n}+1)(\hat{n}+1) + \hat{n}f^2(\hat{n})$  جالب است که رابطه‌ی عملگری  $\hat{S}$  به‌طور مستقیم با هامیلتونی نوسانگرهای غیرخطی (تغییر شکل یافته) مرتبط است [۳] ( $\frac{\omega}{2} \hat{S} = \hat{H}_f$ ).

$$\rho_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} (\rho_n)_{11} & (\rho_n)_{12} & (\rho_n)_{13} & (\rho_n)_{14} \\ (\rho_n)_{21} & (\rho_n)_{22} & (\rho_n)_{23} & (\rho_n)_{24} \\ (\rho_n)_{31} & (\rho_n)_{32} & (\rho_n)_{33} & (\rho_n)_{34} \\ (\rho_n)_{41} & (\rho_n)_{42} & (\rho_n)_{43} & (\rho_n)_{44} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

بدیهی است که  $(\rho_n)_{ij} = (\rho_n)_{ji}^*$ . با توجه به حجم عناصر ماتریس بالا (که به صورت تحلیلی بدست آمده‌اند) و بدلیل کمبود جا از ارائه صریح آنها در اینجا خودداری می‌کنیم. حال با استفاده از ماتریس چگالی کاهش یافته در (۱۲)، سنج تلافی را محاسبه می‌کنیم تا تاثیر برهم کنش جفت‌شدگی غیرخطی اتم-میدان بر درهم‌تنیدگی کیوبیتی‌ها را مورد ارزیابی قرار دهیم. تلافی به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$C(t) = \text{Max} \{0, \Lambda(t)\}, \quad (13)$$

$$\Lambda(t) = \sqrt{\lambda_1(t)} - \sqrt{\lambda_2(t)} - \sqrt{\lambda_3(t)} - \sqrt{\lambda_4(t)}, \quad (14)$$

که  $\lambda_i(t)$ ;  $i = 1, 2, 3, 4$  ویژه‌مقادیر ماتریس زیر هستند:

$$\rho_r(t)(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_r^*(t)(\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (15)$$

### اثر جفت‌شدگی غیرخطی (و خطی) بر دینامیک درهم‌تنیدگی کیوبیتی‌ها

در شکل‌های ۱ تا ۳ تغییرات زمانی سنج تلافی برای حالت درهم‌تنیده دوکیوبیتی با میانگین تعداد فوتون‌های  $\alpha^2 = 0.1$  (شکل ۱) و  $\alpha^2 = 1$  (شکل ۲) و  $\alpha^2 = 5$  (شکل ۳) با دو تابع تغییر شکل  $f(\hat{n}) = 1, \sqrt{\hat{n}}$  رسم شده است. نمودارهای با رنگ قهوه‌ای مربوط به جفت‌شدگی خطی و نمودارهای با رنگ آبی مربوط به جفت‌شدگی غیرخطی هستند. اگر میانگین تعداد فوتون‌های اولیه کم باشد (شکل‌های ۱ و ۲) رفتار درهم‌تنیدگی نوسانی است و تغییر فاحشی بین جفت‌شدگی وابسته به شدت و جفت‌شدگی ثابت دیده نمی‌شود و در هر دو بیشینه درهم‌تنیدگی تقریباً یکسان است. همچنین در این موارد بیشینه تقریباً ثابت و به‌ویژه در شکل ۱ نزدیک یک باقی می‌ماند. همچنین، در شکل ۱ نمودارها تقریباً منطبق بر هم هستند، درحالی که در شکل ۲ چنین نیست. اما با افزایش میانگین تعداد فوتون‌ها (شکل ۳:  $\alpha^2 = 5$ )، درهم‌تنیدگی برای مورد خطی دچار فروافتی در حدود ۵۰٪ می‌شود و نوسان‌ها

با قرار دادن  $f(\hat{n}) = 1$  در (۵) به رابطه عملگر تحول زمانی که در مرجع [۴] به دست آمده است می‌رسیم. حال، تحول زمانی عملگر چگالی را می‌توان طبق معادله فون-نویمن عملگر  $i \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}_I, \hat{\rho}(t)]$  و یا به کمک  $\hat{\rho}(t) = \hat{U}_I(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}_I^\dagger(t)$  فرض می‌کنیم که عملگر چگالی در  $t = 0$  شامل دو بخش اتمی و میدانی به صورت  $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_\psi(0) \hat{\rho}_f(0)$  می‌باشد. که بخش میدانی و اتمی آن به صورت زیر است:

$$\hat{\rho}_\psi(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|,$$

$$\hat{\rho}_f(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} |k\rangle, \quad (6)$$

که در آن  $|\alpha\rangle$  حالت همدوس میدان  $\alpha = \gamma e^{i\varphi}$  یک عدد مختلط و  $|\psi(0)\rangle$  یک حالت بهنجار درهم‌تنیده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\psi\rangle = \text{Sin } \xi e^{i\eta} |+, -\rangle + \text{Cos } \xi e^{-i\eta} |-, +\rangle, \quad (7)$$

که  $\xi$  و  $\eta$  دو پارامتر دلخواه هستند. نمایش ماتریسی این عملگر در پایه‌های دوکیوبیتی به صورت زیر است:

$$\rho_\psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Sin}^2 \xi & \text{Sin } \xi \text{Cos } \xi e^{i2\eta} & 0 \\ 0 & \text{Sin } \xi \text{Cos } \xi e^{-i2\eta} & \text{Cos}^2 \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

از عملگر چگالی روی حالت‌های عددی رد می‌گیریم:

$$\rho_{red}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \rho_{red}(t) | n \rangle, \quad (9)$$

که در آن:

$$\rho_n(t) = \sum_{j,l=0}^{\infty} (\hat{U}(t))_{nj} \rho_\psi(0) (\hat{U}^\dagger(t))_{ln} \frac{\gamma^{j+l} e^{i(j-l)\varphi}}{\sqrt{j!l!}} e^{-\gamma^2}, \quad (10)$$

$$(\hat{U}_I(t))_{nj} = \langle n | \hat{U}_I(t) | j \rangle, \quad (\hat{U}_I^\dagger(t))_{ln} = \langle l | \hat{U}_I^\dagger(t) | n \rangle, \quad (11)$$

در یک میدان همدوس میانگین تعداد فوتون‌ها  $\gamma^2$  است که در اینجا  $\alpha$  را حقیقی فرض کردیم. در واقع، ماتریس چگالی کاهش یافته در پایه‌های دوکیوبیتی به شکل زیر است:

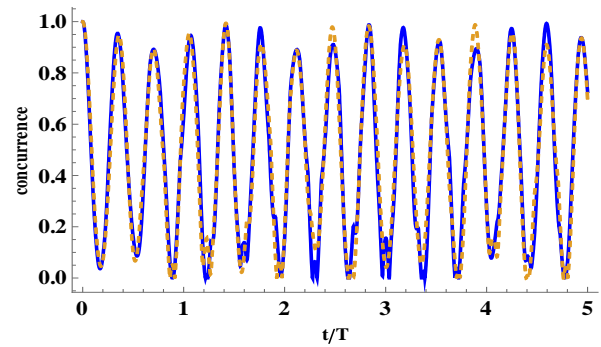
### نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن جفت‌شدگی اتم-میدان غیرخطی، و با رهیافت عملگر تحول زمانی وابسته به شدت، دینامیک درهم‌تنیدگی دوکیوبیت را مورد بررسی قرار داده‌ایم. نتایج عددی نشان می‌دهند که اگر میانگین تعداد فوتون‌های اولیه میدان کم باشد، درهم‌تنیدگی برای جفت‌شدگی خطی و غیرخطی به صورت تقریباً مشابهی رفتار می‌کنند. اما، با افزایش میانگین تعداد فوتون‌های اولیه درهم‌تنیدگی در یک بازه زمانی واحد، برای مورد خطی دچار فروافت ۵۰٪ خواهد شد، در حالی که برای جفت‌شدگی وابسته به شدت، درهم‌تنیدگی به صورت نسبتاً منظمی نوسان می‌کند و کاهش میزان درهم‌تنیدگی کمتر از ۱۵٪ است.

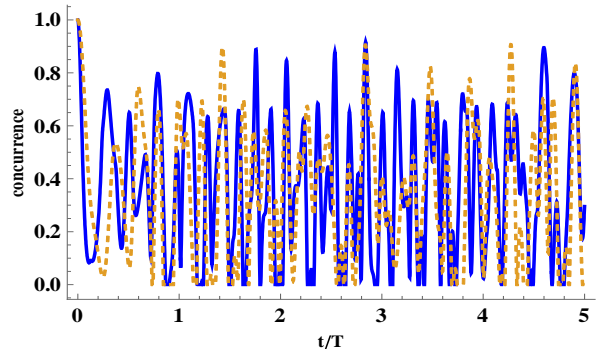
### مرجع

- [1] M. A. Nielsen, and I. L. Shuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press. (2000).
- [2] B. Wang, Z. Y. Xu, Z. Q. Chen, and M. Feng, "Non-Markovian effect on the quantum discord," Phys. Rev. A 81,014101 (2010).
- [3] V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, "f-Oscillators and Nonlinear Coherent State" Phy. Scripta Vol.55, 528-541, (1997).
- [4] X. M. Bai, C. P. Gao, G. Q. Li, N. Liu, J. Q. Liang, "Entanglement dynamic for two spins in an optical cavity-field interaction induced decoherence and coherence revival" Optics Express 25(15), 17051-17065, (2017).
- [5] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).

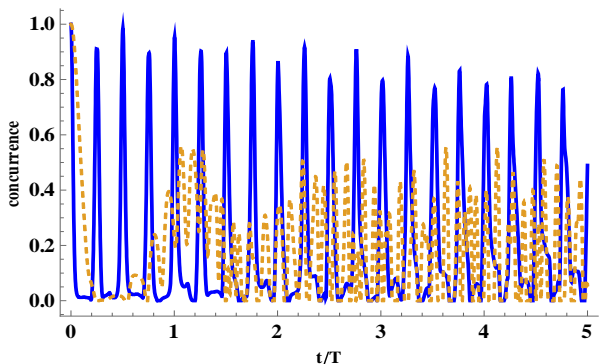
نیز بسیار نامنظم‌اند، اما برای جفت‌شدگی وابسته به شدت به صورت تقریباً تناوبی تغییر می‌کند و قله‌های درهم‌تنیدگی نیز در لحظه‌های بیشتری از زمان حاصل می‌شود، هرچند با گذشت زمان این قله‌ها در حال کاهش هستند، اما کاهش کمتر از ۱۵٪.



شکل ۱: میزان تلاقی بر حسب زمان بدون بعد به ازای پارامترهای  $\eta = 0$  و  $\gamma^2 = 0.1$  و  $\xi = \pi/4$  (خط پیوسته آبی رنگ  $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$  و خط گسسته قهوه‌ای رنگ برای  $f(\hat{n}) = 1$ ).



شکل ۲: میزان تلاقی بر حسب زمان (همه پارامترها مانند شکل ۱)، فقط  $\gamma^2 = 1$ .



شکل ۳: میزان تلاقی بر حسب زمان (همه پارامترها مانند شکل ۱)، فقط  $\gamma^2 = 5$ .