# جایگزیدگی عرضی درآرایه یک بعدی از موجبرهای نوری با بی نظمی قطری همبسته

خاطره جعفری[۱]، مجتبی گلشنی[۲]، مهدی خزاعی نژاد[۲]، عبدالله لنگری[۲]، علیرضا بهرامپور[۲] و سید محمد مهدوی[۲و۳]

[۱] دانشکده علوم، دانشگاه خوارزمی، تهران

[۲] دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

[۳] پژوهشکده علوم و فناوری نانو، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

**چکیده – در این مقاله به بررسی اثر همبستگی بر جایگزیدگی عرضی در شبکه یک بعدی از موجبرهای نوری با ثابت انتشار تصادفی می پردازیم. بدین منظور، با شروع از معادله تنگ-بست حاکم بر انتشار نور، با استفاده از روش اختلال، طول جایگزیدگی برای همبستگی دلخواه ثابت انتشار موجبرها بدست آمده است. محاسبات دو نوع همبستگی کوتاه برد و بلندبرد نشان می دهد که با افزایش قدرت همبستگی، طول جایگزیدگی افزایش و ویژه مدهای سیستم پهن تر می شوند. همچنین، نتایج نشان می دهد که مدهای با ثابت انتشار بزرگتر جایگزیده تر از مدها با ثابت انتشار کوچک تر هستند.**

کلید واژه- جایگزیدگی اندرسون، طول جایگزیدگی عرضی، بی نظمی قطری، همبستگی کوتاه برد و بلندبرد

# Transverse localization in 1D array of optical waveguides with diagonal correlated disorder

Kh. Jafari[1], M. Golshani[2], M. Khazaei Nezhad[2], A. Langari[2], A. R. Bahrampour[2] and S. M. Mahdavi[2, 3]

[1] Faculty of Science, Kharazmi University, Tehran

[2] Department of Physics, Sharif University of Technology, Tehran

[3] Institute for Nanoscience and Nanotechnology, Sharif University of Technology, Tehran

Abstract- In this paper we investigate the effect of correlation on transverse light localization in 1D array of optical waveguides with random propagating constants. To this end, starting from tight-binding equation, and using perturbation method, the localization length has been obtained. Our results for short-range and long-range correlated propagation constants show that correlation enhances localization length, lead to less confinement of eigen-modes. Moreover, we find that eigen-modes with larger propagation constants are more localized than the modes with lower propagation constant values.

Keywords: Anderson localization, Transverse localization length, diagonal disorder, short and long range correlation

## ۱- مقدمه

یکی از پدیده های جالب در فیزیک حالت جامد جایگزیدگی اندرسون[۱] است که در نتیجه آن الکترون می تواند در یک شبکه بی نظم جایگزیده شود. از آنجایی که اساس جایگزیدگی اندرسون تداخل امواج الکترونی بازتابی از ناکاملی های تصادفی شبکه است، این پدیده می تواند در سیستم های موجی دیگر از جمله نور، امواج مادی و حتی صوت مشاهده شود. یکی از مسائل مهم در جایگزیدگی امواج نوری جایگزیدگی عرضی است که در سال ۱۹۹۸ مطرح[۲] و در سال ۲۰۰۷ اولین بار به صورت تجربی در آرایه ای از موجبرهای نوری مشاهده گردید[۳]. با توجه به اینکه معادله حاکم بر انتشار نور در شبکه ای بی نظم از موجبرها، معادله تنگ-بست[1] با ضرایب تصادفی است، نظریه مقیاسی[۴] پیش بینی می کند که همه مدهای سیستم، با هر شدت بی نظمی، جایگزیده هستند. این پیش بینی تا زمانی درست است که ضرایب معادله تنگ-بست اعداد تصادفی با نویز سفید باشند. از این رو بررسی جایگزیدگی در سیستم هایی با ضرایب تصادفی همبسته مورد توجه است. در سال های اخیر مطالعات تئوری و عددی زیادی در این زمینه انجام شده است[۵]. ما در این مقاله با روش اختلالی به محاسبه طول جایگزیدگی در آرایه یک بعدی از موجبرهای نوری با بی نظمی قطری ضعیف همبسته می پردازیم.

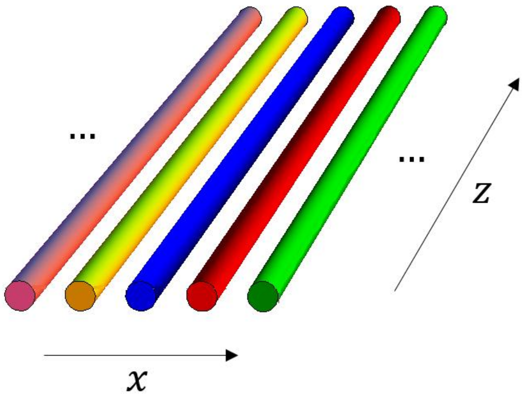
## ۲- روش اختلالی

به منظور بررسی اثر همبستگی بر طول جایگزیدگی عرضی، آرایه یک بعدی از موجبرهای نوری با ضریب شکست تصادفی که در فاصله یکسانی از یکدیگر قرار گرفته اند را در نظر می گیریم (شکل ۱). با استفاده از نظریه جفت شدگی مدها، معادله انتشار دامنه میدان الکتریکی در موجبر n ام به صورت زیر است[۶]:

$$-i\frac{dE_n}{dz}=\varepsilon U_n E_n + t\left(E_{n+1}+E_{n-1}\right) \qquad (۱)$$

که در آن ε قدرت بی نظمی، عدد تصادفی $\varepsilon U_n$ ثابت

[1] Tight-binding




شکل ۱: شبکه یک بعدی از موجبرهای نوری با ضریب شکست تصادفی که در فاصله یکسانی از یکدیگر قرار گرفته اند.

انتشار موجبر n ام با همبستگی دلخواه

$$\langle U_n \rangle = 0\ ,\ \ \langle U_{n+m}U_m \rangle = \kappa(n) \qquad (۲)$$

و t ضریب کوپلاژ بین موجبرهاست. مدهای انتشاری سیستم به صورت $E_n(z)=\psi_n e^{i\beta z}$ می باشند که در آن β ثابت انتشار در راستای z است:

$$\beta\psi_n = \varepsilon U_n \psi_n + t\left(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}\right) \qquad (۳)$$

با تعریف کمیت $R_n=\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$\beta = \varepsilon U_n + t\left(R_n + R_{n-1}^{-1}\right)$$

در غیاب بی نظمی (ε=0)، جواب معادله (۳) توابع گسترده بلاخ $\psi_n = u_k e^{ikn}$ و در نتیجه $R_n = e^{ik}$ است. در حد بی نظمی های ضعیف ($\varepsilon \ll 1$)، از نظریه اختلال ($B_n$ و $C_n$ ضرائب بسط اختلالی می باشند):

$$R_n = e^{ik}e^{\varepsilon B_n+\varepsilon^2 C_n+\dots} = e^{ik}\left(1+\varepsilon B_n+\varepsilon^2\left(C_n+\frac{B_n^2}{2}\right)+\dots\right) \qquad (۴)$$

است. با جایگذاری این عبارت در معادله فوق و مساوی قرار دادن جملات مربوط به توان های مختلف ε به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$\beta = 2t\cos(k) \qquad (۵)$$

$$U_n + t\left(e^{ik}B_n - e^{-ik}B_{n-1}\right) = 0 \qquad (۶)$$

$$e^{ik}C_n - e^{-ik}C_{n-1} + \frac{e^{ik}B_n^2}{2} - \frac{e^{-ik}B_{n-1}^2}{2} = 0 \qquad (۷)$$

معادله (۵) رابطه پاشندگی است که وابستگی ثابت انتشار در راستای z را به ثابت انتشار عرضی نشان می دهد. با میانگین گیری از روابط (۶) و (۷) و با فرض اینکه $U_n$ فرایند تصادفی ماندگار باشد،

$$\left\langle B_n\right\rangle = 0 \;\;,\;\; \left\langle C_n\right\rangle = \frac{i}{2}\cot(k)\left\langle B_n^2\right\rangle \qquad (۸)$$

است. از طرفی نمای لیاپانوف ($\gamma$)، معکوس طول جایگزیدگی عرضی ($L_{loc}$)، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma = \frac{1}{L_{loc}} = \Re\left\{\left\langle \ln R_n\right\rangle\right\}$$

که $\Re\{\cdots\}$ نشان دهنده قسمت حقیقی آرگومان است. با استفاده از روابط (۴) و (۸) نمای لیاپانوف با قسمت موهومی واریانس فرایند تصادفی $B_n$ متناسب است:

$$\gamma = \frac{1}{L_{loc}} = -\frac{\varepsilon^2}{2}\cot(k)\,\Im\left\{\left\langle B_n^2\right\rangle\right\}. \qquad (۹)$$

به منظور محاسبه این واریانس معادله تفاضلی (۶) را با روش تکرار حل می کنیم:

$$B_n = -\frac{e^{-ik}}{t}U_n + e^{-2ik}B_{n-1} = -\frac{e^{-ik}}{t}U_n + e^{-2ik}\left(-\frac{e^{-ik}}{t}U_{n-1} + e^{-2ik}B_{n-2}\right) = \cdots = -\frac{e^{-ik}}{t}\sum_{p=0}^{\infty} e^{-2ipk}U_{n-p}$$

با ضرب $B_n$ در خودش و میانگین گیری از طرفین داریم:

$$\left\langle B_n^2\right\rangle = \frac{e^{-2ik}}{t^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} e^{-2i(p+q)k}\left\langle U_{n-p}U_{n-q}\right\rangle = \frac{e^{-2ik}}{t^2}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} e^{-2i(p+q)k}\kappa(p-q)$$

با تغییر متغیر $p = q + s$ و کمی ساده سازی جواب نهایی به صورت زیر است:

$$\left\langle B_n^2\right\rangle = \frac{-i}{2t^2\sin(2k)}\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-2iks}\kappa(s) \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۹) و کمی ساده سازی، با توجه به اینکه $U_n$ فرایند تصادفی ماندگار است، نمای لیاپانوف (معکوس طول جایگزیدگی عرضی) به صورت زیر خواهد بود:

$$\gamma = \frac{1}{L_{loc}} = \frac{\varepsilon^2}{8t^2\sin^2(k)}\times\left[\kappa(0) + 2\sum_{s=1}^{\infty}\kappa(s)\cos(2ks)\right]. \qquad (۱۱)$$

این رابطه دقیقا همان رابطه ای است که با روش کاملا متفاوت در مرجع [۵] بدست آمده است. با استفاده از رابطه پاشندگی (۵)، طول جایگزیدگی برحسب ثابت انتشار در راستای z به صورت زیر است:

$$\gamma = \frac{1}{L_{loc}} = \frac{\varepsilon^2}{8t^2}\left(1-\frac{\beta^2}{4t^2}\right)^{-1}\left[\kappa(0) + 2\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{s}(-1)^n\kappa(s)\binom{2s}{2n}\left(1-\frac{\beta^2}{4t^2}\right)^n\left(\frac{\beta^2}{4t^2}\right)^{s-n}\right]. \qquad (۱۲)$$

## ۳- نتایج عددی

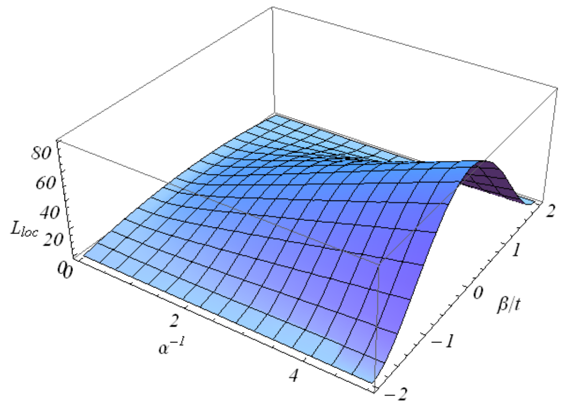
در این قسمت طول جایگزیدگی عرضی مربوط به آرایه یک بعدی از موجبرهای نوری با ثابت های انتشار بی نظم دارای چند نوع همبستگی خاص را بدست می آوریم:

**نویز سفید:** اگر $U_n$ متغیر تصادفی با نویز سفید باشد، $\kappa(n) = \delta_{n,0}$ و طول جایگزیدگی برابر

$$L_{loc} = \frac{8t^2}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{\beta^2}{4t^2}\right)$$

است. این رابطه همان رابطه آشنای تالس[2] برای سیستم با بی نظمی غیرهمبسته می باشد[۷].

[2] Thouless Expression




شکل ۲: طول جایگزیدگی ($L_{loc}$) برحسب ثابت انتشار ($\beta$) و شعاع همبستگی ($\alpha^{-1}$) برای آرایه یک بعدی از موجبرها با ثابت های انتشار همبسته کوتاه برد نمایی.

**همبستگی کوتاه برد نمایی:** اگر ثابت های انتشار $U_n$ متغیر تصادفی با همبستگی کوتاه برد نمایی $\kappa(n)=e^{-\alpha|n|}$ باشد، از آنجایی که

$$1+2\Re\left\{\sum_{s=1}^{\infty}e^{(-\alpha+2ik)s}\right\}=\frac{\sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha)-\cos(2k)}$$

است، طول جایگزیدگی برابر

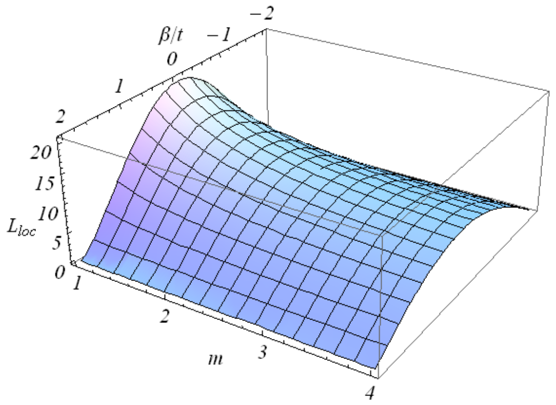
$$L_{loc}=\left(4t^2-\beta^2\right)\frac{2t^2\left(1+\cosh(\alpha)\right)-\beta^2}{t^2\varepsilon^2\sinh(\alpha)}$$

است. شکل ۲، نمودار طول جایگزیدگی برحسب ثابت انتشار ($\beta$) و شعاع همبستگی ($\alpha^{-1}$) را نشان می دهد. با توجه به این نمودار، افزایش شعاع همبستگی باعث کاهش جایگزیدگی ویژه مدهای سیستم و افزایش طول جایگزیدگی عرضی آن ها می شود.

**همبستگی بلند برد:** اگر ثابت های انتشار $U_n$ دارای همبستگی بلند برد $\kappa(n)=\left(1+|n|\right)^{-m}$ با $m>1$ باشند، با تعریف تابع $\Phi(z,m,a)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left(k+a\right)^{-m}$، طول جایگزیدگی به صورت

$$L_{loc}=\frac{8t^2\sin^2(k)}{{}^{2}\left(1+e^{-2ik}\left(\Phi\left(e^{-2ik},m,2\right)+e^{4ik}\Phi\left(e^{2ik},m,2\right)\right)\right)}$$

بدست می آید. نحوه تغییر طول جایگزیدگی برحسب ثابت انتشار ($\beta$) و معکوس قدرت همبستگی ($m$) در شکل ۳ نشان داده شده است. در این حالت نیز با کاهش




شکل ۳: طول جایگزیدگی ($L_{loc}$) برحسب ثابت انتشار ($\beta$) و معکوس قدرت همبستگی ($m$) در آرایه یک بعدی از موجبرها با ثابت های انتشار همبسته بلند برد.

همبستگی (افزایش $m$)، طول جایگزیدگی کاهش و ویژه مدهای سیستم جایگزیده تر می شوند.

## ۴- نتیجه‌گیری

دراین مقاله، با روش اختلالی، طول جایگزیدگی عرضی شبکه یک بعدی نامتناهی از موجبرهای نوری با ضریب شکست تصادفی، با همبستگی داخواه، که در فاصله یکسان از یکدیگر قرار گرفته اند، محاسبه گردید. نتایج محاسبه شده برای همبستگی کوتاه برد نمایی و همبستگی بلند برد، نشان می دهد که، در این سیستم ها، با افزایش همبستگی، میزان جایگزیدگی ویژه حالت های سیستم کاهش می یابد. علاوه براین، نمودارهای بدست آمده، نشان می دهند که ویژه مدها با (قدرمطلق) ثابت انتشار بزرگتر، جایگزیده تر از ویژه مدها با عدد انتشار کوچک تر هستند.

## مراجع


[1] P. W. Anderson, *Absence of diffusion in certain random lattices*, **Phys. Rev.**109, 1492 (1958).
[2] H. De Raedt, Ad Lagendijk, and P. de Vries, *Transverse Localization of Light*, **Phys. Rev. Lett.** 62, 47 (1989).
[3] T. Schwartz, G. Barta, S. Fishman, and M. Segev, *Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices*, **Nature (London)** 466, 52 (2007).
[4] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*, **Phys. Rev. Lett.** 42, 673 (1979).
[5] F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, N. M. Makarov, *Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder*, **Physics Reports**, 512, 125 (2012).
[6] A. Szameit, T. Pertsch, S. Nolte, and A. Tünnermann, *Long-range interaction in waveguide lattices*, **Phys. Rev. A** 77, 043804 (2008).
[7] D.J. Thouless, in: G. Toulouse, R. Balian (Eds.), III-condensed Matter, Amsterdam, North-Holland, 1979.