بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

شاخص غیر کلاسیکی در نمایش ویگنر برای تعیین ویژگی‌های فشردگی حالت‌های فوتونی

فرزانه راستی[۱]، سیامک خادمی[۱] و پروین صادقی[۲]

[۱] گروه فیزیگ دانشگاه زنجان، کیلومتر ۵ جاده تبریز، زنجان.

[۲] دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز.

چکیده – شاخص‌های غیر کلاسیکی برای تعیین خصوصیات فیزیکی حالت‌های کوانتومی مختلف بسیار مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یک دسته از این شاخص‌ها بر اساس میزان سهم منفی‌های تابع توزیع ویگنر کار می‌کنند. شاخص‌های غیر کلاسیکی معرفی شده بر اساس سهم قسمت‌های منفی تابع توزیع ویگنر برای برخی از حالت‌های غیر کلاسیکی مانندحالت‌های فشرده کاربردی ندارند، زیرا با تغییر اندازه و زاویه فشردگی میزان منفی‌های آن تغییر نمی‌کند. بنابر این شاخص‌های غیرکلاسیکی که بر اساس اندازه سهم منفی‌های تابع توزیع ویگنر کار می‌کنند، مانند شاخص غیرکلاسیکی کنفک و یا بندیک، قادر به تشخیص خصوصیات غیر کلاسیکی حالت‌های فشرده نیستند. در این مقاله با استفاده از توزیع زاویه‌ای و شعاعی قدرمطلق تابع توزیع ویگنر، شاخصی غیر کلاسیکی در نمایش ویگنر تعریف شده است که می‌تواند خصوصیات فشردگی، مانند: پارامتر و زاویه فشردگی، را بدست دهد. از این شاخص برای بررسی خصوصیات حالت‌های فوتونی فشرده استفاده شده و نشان داده می‌شود که این شاخص علاوه بر پارامتر و زاویه فشردگی، توانایی تعیین تعداد فوتون‌های سامانه کوانتومی را نیز دارد.

کلید واژه- تابع توزیع ویگنر، حالت‌های فشرده، شاخص غیرکلاسیکی، حالت فوتونی.

A Non-classicality indicator for the properties of Squeezed photonic states in the Wigner representation

Farzaneh Rasti[1], Siamak Khademi[1] and Parvin Sadeghi[2]

[1]Physics Department, University of Zanjan.

[2] Marand Faculty of Engineering, University of Tabriz.

Abstract- Non-classicality indicators are widely applied to describe the physical properties of quantum states. One category of these indicators is defined in terms of negativities portion of Wigner distribution function. These indicators are not indicating to some quantum properties, e.g.: squeezing. Because the squeezing operations don't effect on, the amount of negativities of Wigner distribution functions. Therefore the non-classicality indicators, e.g.: Kenfak or Benedict, which are working based on the negativities of distribution functions, cannot recognize the squeezing properties. In this paper a non-classicality indicator is introduced, in terms of the radial and angular distribution of absolute value of Wigner distribution function, which can recognize the squeezing properties, e.g.: squeezing parameter and squeezing angle. This non-classicality indicator is applied for the squeezed photonic states. We show that this indicator can evaluate the number of photons as well as the squeezing parameter and squeezing angle.

Keywords: Wigner Distribution function, Squeezed states, Non-classicality indicator, Number state.

۱- مقدمه

بر اساس تعریف توابع توزیع در فضای فاز کوانتومی رفتاری شبه کلاسیکی دارند [۱]. یکی از این توابع مهم و پرکاربرد، تابع توزیع ویگنر است که در سال ۱۹۳۲ توسط ویگنر معرفی شد[۲]. برخلاف توابع کلاسیکی تابع توزیع ویگنر در بعضی از نواحی فضای فاز مقادیری منفی دارد. برخی از فیزیکدانان بر این عقیده هستند که منفی شدن تابع توزیع ویگنر ناشی از آثار غیر کلاسیکی است و با تعیین پارامترهایی که به سهم منفی تابع توزیع وابسته است، این آثار غیر کلاسیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند[۳ و۴]. از شاخص‌های غیر کلاسیکی مهم که بر اساس سهم منفی‌های تابع توزیع کار می‌کنند می توان از پارامتر δ و ν نام بردکه به ترتیب اولی توسط کنفک و همکارش زیخوویسکی و دومی توسط بندیک ارائه شده است [۳ و۴]. در بسیاری از مقاله‌ها نویسندگان به این دو پارامتر و مخصوصا پارامتر کنفک توجه خاصی داشته‌اند و از آنها به فراوانی استفاده کرده‌اند [۵ و۶ و۷ و۸] . البته در بعضی از حالت‌های کوانتومی، مانند حالت فشرده و یا حالت‌های کوانتومی همیشه مثبت، علی‌رغم وجود خصلت‌های غیر کلاسیکی، شاخص‌های کنفک و بندیک قادر به تشخیص ویژگی‌های غیر کلاسیکی آنها نیستند. به ویژه برای حالت فشرده، که یک ویژگی بسیار مهم کوانتومی است، با توجه به اینکه مقدار سهم قسمت‌های منفی تابع توزیع ویگنر تغییر نمی‌کند، شاخص‌هایی که بر اساس مقدار سهم منفی تابع توزیع ویگنر تعریف شده‌اند کارایی ندارند زیرا میزان منفی‌های تابع توزیع بر اثر عمل عملگر فشردگی بدون تغییر باقی می‌مانند. در نتیجه این شاخص‌ها معیاری از ویژگی غیر کلاسیکی فشردگی نیستند.

در این مقاله نویسندگان با استفاده از توزیع زاویه‌ای و شعاعی تابع توزیع ویگنر به تعریف شاخصی غیر کلاسیکی می‌پردازند که برای تشخیص خصوصیت‌های غیر کلاسیکی فشردگی کاربرد دارد. برای نشان دادن توانایی این شاخص خصوصیات کوانتومی (غیرکلاسیکی) حالت‌های فوتونی فشرده با استفاده از این شاخص مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در بخش بعدی علاوه بر معرفی مختصر شاخص غیرکلاسیکی کنفک، دو شاخص غیرکلاسیکی دیگر را که بر اساس توزیع زاویه‌ای و شعاعی قدرمطلق تابع توزیع ویگنر تعریف می‌شوند، معرفی می‌کنیم. در بخش سوم از این شاخص‌ها برای بررسی خصوصیات کوانتومی حالت‌های فوتونی فشرده استفاده می‌شود. بخش پایانی نیز به بحث ونتیجه‌گیری اختصاص خواهد داشت.

۲- شاخص Δ

با استفاده از تابع توزیع ویگنر در فضای فاز کوانتومی

$$w(q,p)=\frac{1}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2ipy/\hbar}\psi^*(q-y,t)\psi(q+y,t)dy, \qquad (۱)$$

در سال ۲۰۰۴ شاخص غیر کلاسیکی δ، توسط کنفک و زیخوویسکی

$$\delta_w=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[|w(q,p)-w(q,p)|]dqdp, \qquad (۲)$$

ارائه گردید. با توجه به بهنجار بودن تابع توزیع ویگنر می‌توان شاخص δ را به صورت

$$\delta_w=\int_{-\infty}^{\infty}|w(q,p)|dqdp-1, \qquad (۳)$$

نوشت. مقدار این شاخص دو برابر سهم قسمت‌های منفی تابع توزیع ویگنر است. به راحتی می‌توان نشان داد که مقدار شاخص غیر کلاسیکی δ برای حالت فوتونی قبل و بعد از اعمال عملگر فشردگی تغییری نمی‌کند. در اغلب مقاله‌ها تنها به وجود یا عدم وجود مقادیر منفی در تابع توزیع ویگنر (صفر بودن یا غیر صفر بودن تابع δ) به عنوان یک نشانگر کوانتومی توجه شده است. صادقی و همکاران نشان دادند علاوه بر این تغییرات مقدار منفی‌های تابع توزیع ویگنر دارای مفاهیمی فیزیکی مانند تغییر در عدم قطعیت کوانتومی [۶] و یا تغییر در آنتروپی سامانه کوانتومی [۷] است. به نظر نویسندگان این مقاله علاوه بر موارد فوق توزیع منفی‌های تابع ویگنر و حتی توزیع مثبت‌های آن در فضای فاز نیز می‌تواند با برخی خصوصیات کوانتومی سامانه کوانتومی در ارتباط باشد.

برای بررسی توزیع منفی و مثبت‌های تابع توزیع ویگنر در ابتدا به بررسی توزیع زاویه‌ای و شعاعی آن می‌پردازیم. شاخص غیر کلاسیکی δ را می توان بر حسب تابع توزیع ویگنر (و منفی‌های آن) در مختصات قطبی، به صورت زیر نشان داد:

$$\delta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}|w(R,\theta)|RdRd\theta-1 \qquad (۴)$$

شاخص‌های زاویه‌ای و شعاعی $\Delta(\theta)$ و $\Delta(R)$ را بترتیب با

$$\Delta(\theta)=\int_0^{\infty}|w(R,\theta)|RdR, \qquad (۵)$$

و

$$\Delta(R)=\int_0^{2\pi}|w(R,\theta)|d\theta, \qquad (۶)$$

نشان می‌دهیم که بصورت

$$\delta=\int_0^{2\pi}\Delta(\theta)d\theta-1=\int_0^{\infty}\Delta(R)dR-1, \qquad (۷)$$

با شاخص غیر کلاسیکی کنفک ارتباط دارند. در روابط فوق R مختصه شعاعی و θ مختصه زاویه‌ای فضای فاز در دستگاه مختصات قطبی هستند. شاخص‌های فوق توزیع زاویه‌ای و شعاعی قدرمطلق تابع توزیع ویگنر را می‌سنجند.

۳- شاخص Δ برای حالت‌های فشرده فوتونی

حالت‌های فشرده فوتونی با اعمال عملگر فشردگی $\hat{S}(\xi)$ بر روی حالت فوتونی $|n\rangle$

$$|n,\xi\rangle=S(\xi)|n\rangle, \qquad (۸)$$

بدست می‌آید. عملگر فشردگی مرتبه اول[1] $\hat{S}(\xi)$ به صورت

$$\hat{S}(\xi)=\exp(\frac{1}{2}(\xi^*\hat{a}^2+\xi\hat{a}^{+2})) \qquad (۹)$$

بیان می‌شود که $\xi=r\exp[i\phi]$، وابسته به r و ϕ است که به ترتیب پارامتر و زاویه فشردگی هستند.

حالت فشرده فوتونی n در نمایش ویگنر به صورت

$$w_{Sq}=\frac{(-1)}{\pi}\exp[-2(|b|)^2]L_n[4(|b|)^2], \qquad (۱۰)$$

است، که در آن

$$b=\cosh[r]\alpha^*+\exp[-i\phi]\sinh[r]\alpha, \qquad (۱۱)$$

و

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip), \qquad (۱۲)$$

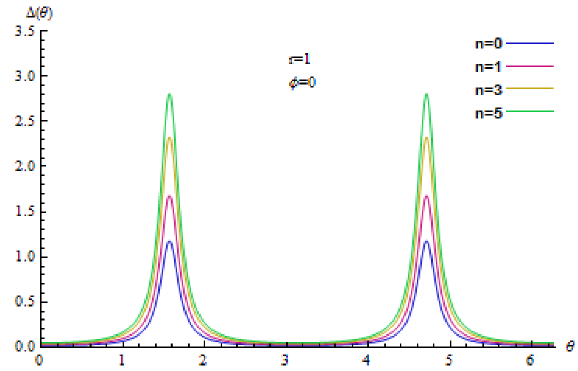
است. همچنین α^* مزدوج مختلط α و L_n چند جمله‌ای‌های لاگر، q و p نیز به ترتیب مختصات و تکانه بدون بعد هستند که به مختصات فضای فاز مشهورند. در این مقاله به بررسی شاخص زاویه‌ای $\Delta(\theta)$ پرداخته شده است و شاخص شعاعی در مقاله‌های بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۲) و (۵) شاخص زاویه‌ای $\Delta(\theta)$ حالت فشرده فوتونی را در شکل‌های ۱ تا ۳ بر حسب زاویه قطبی θ رسم شده است.

در شکل ۱ شاخص $\Delta(\theta)$ برای حالت‌ها فوتونی فشرده متفاوت نشان داده شده است. با ثابت در نظر گرفتن پارامتر فشردگی، $r=1$، و زاویه فشردگی، $\phi=0$، در مشاهده می‌شود که با افزایش n بیشینه شاخص زاویه‌ای $\Delta(\theta)$ نیز افزایش می‌یابد. در اینصورت با اندازه‌گیری و مقایسه بیشینه منحنی Δ_{Max} مقدار n حالت فشرده مشخص می‌گردد. همچنین این بیشینه در زاویه $\theta_m=\pi/2$ اتفاق می‌افتد که معادل با زاویه فشردگی $\phi=0$ است.

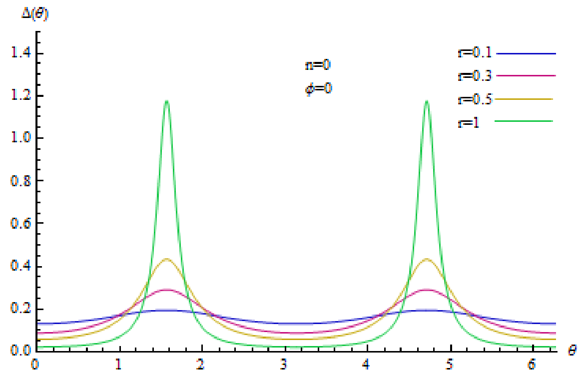
در شکل ۲ شاخص $\Delta(\theta)$ برای حالت فوتونی $n=0$ و زاویه فشردگی $\phi=0$ و برای چند پارامتر فشردگی متفاوت نشان داده شده است. به راحتی دیده می‌شود که با افزایش پارامتر فشردگی قله شاخص $\Delta(\theta)$ تیزتر شده و پهنای آن باریکتر می‌شود. بنابر این با اندازه‌گیری و مقایسه پهنای قله‌های شاخص $\Delta(\theta)$ اندازه پارامتر فشردگی تعیین می‌شود.

همچنین تغییرات پارامتر فشردگی (پهنای تابع $\Delta(\theta)$) به عنوان شاخصی برای تعیین عدم قطعیت کوانتومی فاز است. بطوری که در فشردگی‌های بالا عدم قطعیت کوانتومی فاز کوچک می‌شود و بالعکس در فشردگی کم عدم قطعیت فاز بزرگتر می‌شود. اگر پارامتر فشردگی به سمت صفر میل کند، سامانه نیز به حالت فوتونی (غیرفشرده) میل می‌کند و در نتیجه توزیع زاویه‌ای تابع توزیع متقارن و عدم قطعیت فاز به حداکثر مقدار (2π) نزدیک می‌شود (شکل ۲ را ببینید).

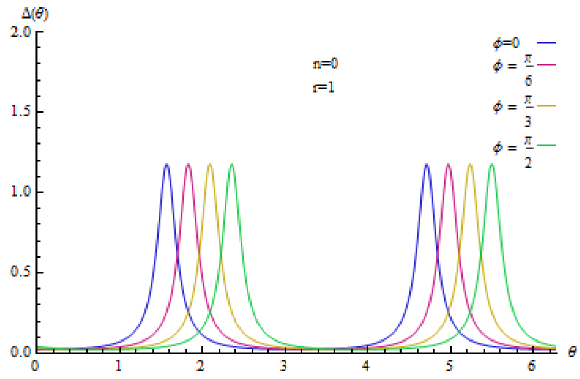
[1] در عملگرهای فشردگی مرتبه‌های بالاتر توان‌های عملگرهای نردبانی بالاتر از ۲ وجود دارد.



شکل ۱: شاخص $\Delta(\theta)$ برای حالت‌های فوتونی فشرده متفاوت $n=0,1,2,3,5$ با زاویه و پارامتر فشردگی ثابت $\phi=0$ ، $r=1$.



شکل ۲: شاخص $\Delta(\theta)$ برای حالت فشرده فوتونی، $n=0$، و زاویه فشردگی $\phi=0$ ثابت، برای پارامتر فشردگی متفاوت $r=0.1,0.3,0.5,1$.



شکل۳: شاخص $\Delta(\theta)$ برای حالت فشرده فوتونی، $n=0$، و پارامتر فشردگی، $r=1$ ثابت، برای زاویه فشردگی متفاوت $\phi=0,\pi/2,\pi/3,\pi/6$.

در شکل ۳، شاخص $\Delta(\theta)$برای حالت فوتونی $n=0$ و پارامتر فشردگی $r=1$ و زاویه‌های فشردگی متفاوت رسم شده است. مشاهده می‌شود که پهنا و مقدار بیشینه شاخص غیر کلاسیکی $\Delta(\theta)$ ثابت باقی مانده، اما، بیشینه مقدار شاخص $\Delta(\theta)$ به ازای زاویه فشردگی متفاوت به اندازه از ϕ $\pi/2$ جابجا شده است. بنابراین زاویه فشردگی کاملا قابل تعیین و برابر با $\phi=\theta_m-\pi/2$ است.

۴- نتیجه‌گیری

شاخص غیرکلاسیکی δ توسط کنفک و زیخوویسکی، بر اساس سهم قسمت منفی تابع توزیع ویگنر در فضای فاز کوانتومی تعریف شده است. در حالی‌که مقدار منفی تابع توزیع ویگنر معیاری از غیر کلاسیکی بودن سیستم مورد مطالعه است، اما در برخی از حالت‌ها از جمله حالت فشرده عددی با توجه به تعریف عملگر فشردگی، سهم قسمت منفی تابع توزیع ویگنر تغییر نمی‌کند. بنابراین شاخص غیر کلاسیکی δ قادر به تشخیص خصوصیات غیر کلاسیکی فشردگی نیست. در این مقاله برای حل مسئله، شاخصی جدید ارائه گردید که بر اساس توزیع منفی‌ها و مثبت‌های (قدر مطلق) تابع توزیع ویگنر تعریف شده است. برای مثال مقدار منفی‌های تابع توزیع ویگنر برای تمامی حالت‌های فوتونی، از جمله حالت فوتونی خلا، $n=0$، تحت عمل فشردگی علی‌رغم وجود خصلت غیر کلاسیکی فشردگی تغییر نمی‌کند. با تعریف شاخص زاویه‌ای نشان داده شد که این شاخص علاوه بر اندازه پارامتر فشردگی و زاویه فشردگی، به تعداد فوتون‌ها نیز حساس است.

مراجع

[1] Hai-Woong Lee., *Theory and application of quantum phase space distribution function*, **Physics Reports,** 259 (1995).

[2] Wigner E. P., *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, **Phys. Rev**. 40 (1932) 749.

[3] Benedict M. G. and Czirjak A., *Wigner functions squeezing properties, and slow de-coherence of a mesoscopic superposition of two-level atoms*, **Phys. Rev. A,** 60 (1999) 4034

[4] Kenfak A. and Zyczkowski K., *Negativity of the Wigner function as an indicator of nonclassicality*, **J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.** 6 (2004) 396-404.

[5] Talebi Motlagh S. and Taati-Asil F., *The anti-standard ordered distribution function in the Paul trap and its non-classical indicator*, **The European Physical Journal D** 6 (2012) 257.

[6] P. Sadeghi, S. Khademi and S. Nasiri, *Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution function*, **Phys. Rev. A**, 82(2010) 021102.

[7] P. Sadeghi, S. Khademi and A. H. Darooneh., *Tsallis entropy in phase-space quantum mechanics*, **Phys. Rev. A**, 86(2012) 012119.

[8] A. Kowalewska-Kudlaszyk, J. K. Kalaga and W. Leonski., *Wigner function non-classicality as indicator of quantum chaos*, **Phys. Rev. E**, 78(2088) 066219.