



بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و  
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس  
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،  
دانشگاه شیراز،  
شیراز، ایران.  
۱۱-۹ بهمن ۱۳۹۷



## ضرایب بازتاب از یک نیم فلز وایل در تابش مایل

علی لطیفی<sup>۱\*</sup>، صفا آدمی<sup>۱</sup>، مرتضی سلطانی<sup>۱</sup>، ابراهیم قنبری عدیوی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

\* رایانامه: [a.latifi@sci.ui.ac.ir](mailto:a.latifi@sci.ui.ac.ir)

چکیده - در این پژوهش ابتدا با استفاده از معادلات ماکسول تصحیح شده در محیط نیم فلز وایل پاسخ های الکترومغناطیس از این محیط بررسی شده است و سپس با اعمال شرایط مرزی مناسب ضرایب بازتاب در پراکندگی نور از سطح یک نیم فلز وایل در فرود مایل و در هندسه ی خاص به دست آمده است. هندسه ی مورد نظر در اینجا عبارت است از یک محیط نیم بینهایت از مواد وایل که در آن امتداد نقاط وایل در راستای محور z قرار دارد و صفحه ی بازتاب آن منطبق بر صفحه ی y-z است. پس از انجام محاسبات با مقایسه با جواب های موجود برای فرود عمود در هندسه مشابه می بینیم که جواب ها در تطابق باهم هستند.

کلید واژه- مواد توپولوژیک، رسانندگی هال، نیم فلز وایل

## Reflection coefficients from a Weyl semimetal for an oblique incidence

Ali Latifi<sup>1,\*</sup>, Safa Adami<sup>1</sup>, Morteza Soltani<sup>1</sup>, Ebrahim Ghanbari Adivi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Faculty of sciences, University of Isfahan, Isfahan, Iran

\* Email: [a.latifi@sci.ui.ac.ir](mailto:a.latifi@sci.ui.ac.ir)

**Abstract-** In this research, at first, the electromagnetic response of a topological Weyl semimetal has been investigated in the bulk by using the modified Maxwell equations and then, Reflection coefficients in the scattering of light from the Weyl semimetal for oblique incidence is obtained by applying the boundary conditions. The geometry here is a semi-infinite slab of Weyl material in which the direction of Weyl nodes is along the z-axis and the reflecting surface is aligned with the y-z plane. Finally, the results are checked by comparing them with the previous results of normal incidence in the same geometry.

Keywords: Topological materials, Hall conductivity, Weyl semimetal

## مقدمه

مطلبی که در این مقاله به آن خواهیم پرداخت، به دست آوردن ضرایب بازتاب از یک نیم فلز وایل، در فرود مایل است. برای این منظور ابتدا با در نظر گرفتن معادلات ماکسول اصلاح شده در محیط نیم فلز وایل رابطه‌ای برای توصیف میدان‌های الکترومغناطیس در محیط این مواد ارائه می‌دهیم که در ادامه برای به دست آوردن ضرایب بازتابی از سطح این مواد استفاده می‌شود. سپس با اعمال شرایط مرزی مناسب ضرایب بازتاب از سطح مواد نیم فلز وایل را در فرود مایل محاسبه می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که در حد فرود عمود، نتایج به دست آمده در این مقاله با نتایج موجود در این حالت مطابق است.

## معادله‌ی میدان الکتریکی در محیط نیم فلز وایل

پاسخ‌های الکترومغناطیس از نیم فلز وایل توسط [۴] یک سهم اکسیونی تغییر فضایی توصیف می‌شود. با در نظر گرفتن سهم اکسیونی معادله‌ی حرکت با رابطه‌ی

$$-\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{P}^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2\pi\mu_0} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu (\theta F_{\alpha\beta}) = J^\nu \quad (2)$$

توصیف می‌شود. که  $\mathcal{P}^{\mu\nu}$  تانسور قطبش،  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ثابت ساختار ریز،  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar$  شدت میدان الکترومغناطیس و  $\theta$  میدان اکسیونی است که به صورت  $\theta(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} - 2b_0 t$  تعریف می‌شود. در اینجا  $b_0$  را صفر در نظر می‌گیریم، چون در مسئله‌ی مورد علاقه‌ی ما جفت نقاط وایل در پتانسیل شیمیایی یکسانی قرار دارند. این معادله‌ی حرکت منجر به اصلاحاتی در روابط ماکسول می‌شود. در نهایت تنها دو معادله از معادلات ماکسول به صورت

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho + \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{B}, \quad (3)$$

اثر کوانتومی هال یکی از مهم‌ترین اکتشافات در دهه‌های اخیر در فیزیک ماده چگال است. در اثر کوانتومی هال [۱] یک میدان مغناطیسی قوی حرکت الکترون‌ها در حجم ماده را محدود می‌کند، اما همان میدان آن‌ها را مجبور می‌کند تا روی لبه‌ها و یا روی سطوح حرکت کنند. لذا یک فلز دوبعدی در یک میدان مغناطیس قوی در حجم همانند یک عایق و در سطح همچون یک رسانا عمل می‌کند. این مفهوم نقطه شروع توصیف و ساخت عایق‌های توپولوژیک است. از این رو عایق‌های توپولوژیک به موادی اطلاق می‌شود که همانند یک عایق معمولی، یک گاف انرژی در حجم خود دارد، در حالی که روی سطح (یا لبه در دو بعد)، در این گونه از مواد حالت‌های بدون گاف محافظت شده با تقارن معکوس زمانی دیده می‌شود که منجر به رسانندگی روی سطح (یا لبه) عایق‌های توپولوژیک می‌شود [۲ و ۳].

یکی از حالت‌های ماده نزدیک به این گونه مواد، نیم فلز وایل است. نیم فلز وایل به موادی گفته می‌شود که از معادله‌ی وایل پیروی کند. بعد از آن که [۴] دیراک معادله‌ی فرمیون‌ها را نوشت، هرمن وایل معادله‌ی دیراک بدون جرم را نوشت که به نام معادله‌ی وایل شناخته می‌شود و به صورت

$$H = \pm v_f \vec{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}). \quad (1)$$

نشان داده می‌شود، که  $v_f$  سرعت فرمی،  $\vec{k}$  تکانه‌ی بلور در منطقه‌ی اول بریلون،  $2\mathbf{b}$  جدایی نقاط وایل در فضای تکانه (انرژی) و  $\vec{\sigma}$  ماتریس‌های پائولی است. علامت + مربوط به ذرات با هلیسیتی مثبت و علامت - مربوط به ذرات با هلیسیتی منفی است. در سال‌های اخیر با تحقق امکان ساخت تجربی این مواد در آزمایشگاه علاقه به این گونه از مواد به دلیل کاربردهای فراوان آن بیش از پیش است.

### ضرایب بازتاب از نیم‌فلز وایل

دترمینان از معادله‌ی ماتریسی (۸) به رابطه‌ی برای فرکانس‌هایی که بردار موج  $\kappa$  می‌تواند داشته باشد می‌انجامد. در این مورد فرکانس‌هایی به صورت [۵]

$$(\omega^\pm)^2 = \kappa^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 \pm \sigma \sqrt{\kappa_z^2 + \frac{1}{4}\sigma^2} \quad (9)$$

به دست می‌آیند. برای شروع یک نیم‌فلز وایل را در نظر می‌گیریم که به ناحیه‌ی  $x > 0$  محدود شده و در  $x = 0$  صفحه‌ی مرز ماده‌ی وایل با خلأ شکل گرفته که منطبق بر صفحه‌ی  $y-z$  است. در این مورد صفحه‌ی فرود که به صفحه‌ی گفته می‌شود که با بردارهای  $\mathbf{q}$  (بردار موج فرودی) و  $\hat{n}$  (بردار یکه‌ی عمود بر سطح ماده) هم صفحه هست، در صفحه‌ی  $x-z$  است. در این حالت،  $\kappa_y$ ،  $\kappa_x$  و  $\omega$  در دو محیط باید یکسان باشد، اما  $\kappa_x$  تغییر می‌کند. بنابراین به راحتی می‌توان به دست آورد که برای یک موج فرودی با بردار موج  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  موج عبوری

$$(\kappa_x^\pm)^2 = q_x^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \mp \sqrt{-\frac{1}{4}\sigma^2} \quad (10)$$

است. در اینجا دیده می‌شود که به ازای یک موج فرودی، دو موج عبوری خواهیم داشت که خاصیت دو شکستی در نیم‌فلزهای وایل را نشان می‌دهد. در ادامه ما موج فرودی را با  $\mathbf{E}^0$  و با بردار موج  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  و موج بازتابی را با  $\mathbf{E}^r$  که در جهت بردار موج  $\mathbf{q}^r = (q_x, q_y, -q_z)$  انتشار می‌یابد، در محیط خلأ ( $z < 0$ ) توصیف می‌کنیم. همچنین در داخل ماده  $\mathbf{E}^\pm$  قطبش‌های موج عبوری با بردارهای موج  $\kappa^\pm = (\kappa_x^\pm, q_y, q_z)$  هستند. حال با اعمال شرایط مرزی روی مرز مشترک بین دو محیط ( $z = 0$ ) ماتریس ضرایب بازتاب را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^r - \mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0, \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} - \frac{2\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{b} \times \mathbf{E}. \quad (4)$$

تغییر می‌کند و دو رابطه‌ی دیگر بدون تغییر باقی می‌ماند. حال با استفاده از این روابط می‌توان نشان داد که:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{\pi c} \mathbf{b} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5)$$

که  $\epsilon$  ثابت دی‌الکتریک نیم‌فلز وایل و  $c$  سرعت نور در خلأ است که آن‌ها را یک در نظر می‌گیریم. در ادامه امتداد نقاط وایل در جهت محور  $z$  در نظر گرفته می‌شود، یعنی  $\mathbf{b} = b\hat{z}$  است. با در نظر گرفتن شکل نمایی موج تخت می‌دانیم که با مشتق‌گیری زمانی از تابع مورد نظر، عملگر  $\partial/\partial t$  عبارت است از  $\partial/\partial t = -i\omega$  همین‌طور عملگر  $\nabla$  عبارت است از  $\nabla = i\bar{\kappa}$  بنابراین معادله‌ی (۵) به شکل

$$\left( \kappa \otimes \kappa - \kappa^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \cdot \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \hat{\mathbf{I}} - \frac{i\sigma}{\omega} \left( \hat{z} \times \hat{\mathbf{I}} \right) \right] \cdot \mathbf{E}. \quad (6)$$

نوشته می‌شود. در اینجا  $\hat{\mathbf{I}}$  ماتریس یکه و  $\sigma = e^2 b / 2\pi^2$  رسانندگی حال است. عبارت داخل کروشه به عنوان تانسور ثابت دی‌الکتریک شناخته می‌شود و به صورت

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & i\sigma/\omega & 0 \\ -i\sigma/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

است. بنابراین شکل نهایی معادله‌ی میدان الکتریکی عبارت است از:

$$\left( \kappa \otimes \kappa - \kappa^2 \hat{\mathbf{I}} + \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \right) \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

در اینجا می‌بینیم که اگر میدان اولیه عرضی باشد، داخل ماده مؤلفه‌های طولی میدان نیز مشاهده می‌شود.

$$R_{yy} = \{[(\kappa_x^- + q_x)(\kappa_x^+ + q_x) + q_z^2]\gamma\sigma - i[(2q_x + \kappa_x^- + \kappa_x^+)(\kappa_x^- - q_x)(\kappa_x^+ - q_x) - 2q_x\sigma^2]\}/D, \quad (18)$$

$$D = [(\kappa_x^- + q_x)(\kappa_x^+ + q_x) + q_z^2]\gamma\sigma + i[(\kappa_x^- + \kappa_x^+)(\kappa_x^- + q_x)(\kappa_x^+ + q_x)]. \quad (19)$$

در حالت تابش عمودی با میل دادن  $q_z$  به سمت صفر ضریب بازتاب

$$R_{yy} = \frac{\sigma^2 + i\gamma\sigma(\kappa_x^+ + q_x)}{(\kappa_x^+ + q_x)^2 - i\gamma\sigma(\kappa_x^+ + q_x)} \quad (20)$$

است که با نتایج مقاله [۴] در توافق کامل است.

### نتیجه گیری

در بازتاب و عبور از مواد وایل اول این که میدان الکتریکی در داخل محیط دیگر عرضی نیست و مؤلفه های طولی نیز مشاهده می شود و دوم آن که در بازتاب از این مواد در فرود مایل مدهای TE و TM به صورت همزمان وجود دارند.

### مرجع ها

- [1] J. K. Asbóth, L. Oroszlány, and A. Pályi, "A Short Course on Topological Insulators", Lecture Notes in Physics 919, 2016.
- [2] E. Burstein, A. MacDonald, P. Stiles, M. Franz, and L. Molenkamp, *Contemporary Concepts of Condensed Matter Science Topological Insulators*, p. 4, Elsevier, 2013.
- [3] Y. Ando, "Topological insulator materials", Journal of the Physical Society of Japan 82, 102001, 2013.
- [4] M. Kargarian, M. Randeria, and N. Trivedi, "Theory of Kerr and Faraday rotations and linear dichroism in Topological Weyl Semimetals", Scientific reports 5, 12683, 2015.
- [5] J. H. Wilson, A. A. Allocca, and V. Galitski, "Repulsive Casimir force between Weyl semimetals", Physical Review B 91, 235115, 2015.

$$\hat{n} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{E}^0 + \mathbf{q}^r \times \mathbf{E}^r - \kappa^+ \times \mathbf{E}^+ - \kappa^- \times \mathbf{E}^-) = \mathbf{j}. \quad (12)$$

که در آن  $\hat{n}$  بردار یکه عمود بر سطح ماده که در جهت  $\hat{x}$  و  $\mathbf{j}$  جریان سطحی در نیم فلز وایل است. این جریان معادل  $\mathbf{j}^s = \sigma^s \mathbf{E}$  است. با توجه به این که عمق نفوذ رسانندگی  $\sigma_{yy}^s$  خیلی بزرگ تر از طول موج ( $\delta \ll \lambda$ ) است از تأثیر آن در جریان سطحی صرف نظر کرده و در نتیجه  $\mathbf{j}_y^s = \sigma_{yx}^s \mathbf{E}_x$  است. از آن جا که عمق نفوذ رسانندگی  $\sigma_{yx}^s$  در صفحه ی  $x=0$  برابر  $\xi(\kappa_z) = 2b/(b^2 - \kappa_z^2)$  است در نقاط  $\kappa_z = \pm b$  واگرا شده و عمق نفوذ بینهایت می شود. به منظور سطحی ماندن جریان عمق نفوذ باید از مرتبه ی طول موج باشد. از این رو داریم:

$$\sigma = \int_{\xi \leq \lambda} \frac{d\kappa_z}{2\pi} \sigma^{2D}(\kappa_z) \xi(\kappa_z) \frac{e^2}{\pi h} b \lambda \quad (13)$$

در نهایت جریان سطحی را برابر با  $\mathbf{j}_y^s = \gamma \mathbf{E}_x$  می گیریم که در آن  $\gamma = \frac{e^2}{\pi h} \ln(2b\lambda)$  است.

با تفکیک کردن قطبش تابش فرودی و بازتابی به امواج الکتریکی عرضی (TE) و امواج مغناطیسی عرضی (TM) و بررسی جداگانه هر کدام ماتریس ضرایب بازتاب از رابطه ی

$$\begin{pmatrix} E_{TM}^r \\ E_{TE}^r \end{pmatrix} = R(\omega, q) \begin{pmatrix} E_{TM}^0 \\ E_{TE}^0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

قابل محاسبه است. در این حالت مؤلفه های ماتریس بازتاب عبارت اند از:

$$R_{xx} = \{[(\kappa_x^- - q_x)(\kappa_x^+ - q_x) + q_z^2]\gamma\sigma - i[(2q_x - \kappa_x^- - \kappa_x^+)(\kappa_x^- + q_x)(\kappa_x^+ + q_x) - 2q_x\sigma^2]\}/D, \quad (15)$$

$$R_{xy} = 2\sigma q_x^2 q_z / D, \quad (16)$$

$$R_{yx} = 2\omega q_z [\sigma + i\gamma(\kappa_x^- + \kappa_x^+)] / D, \quad (17)$$