بیست و چهارمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و
دهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۱۰ الی ۱۲ بهمن ۹۶ - دانشگاه شهرکرد
24th Iranian Conference on Optics and Photonics (ICOP 2018) and
9th Iranian Conference on Photonics Engineering and Technology (ICPET 2018)
Jan 30 - Feb 1 , 2018 - Shahrekord University

جابجایی بسامد تشدیدِ جذب در اثر انتقال تکانه زاویه‌ای از موج لاگر-گاوسی به سامانه‌ی *اتمی*

سمیه عباس زاده، صاحب صمیمی و محمد مهدی گلشن

بخش فیزیک دانشگاه شیراز، شیراز، ایران، ۸۴۷۹۵-۷۱۹۴۶

چکیده – در این مقاله، مدلی برای برهمکنش موج لاگر-گاوسی با یک اتم دوترازه با در نظر گرفتن همزمانِ حرکت مرکز جرم اتم و اتلاف‌های فازی، ارائه می‌دهیم. برای این منظور ابتدا هامیلتونی الکترونی همراه با هامیلتونی مرکز جرم را ارائه و به حل معادله‌ی اساسی برای ماتریس چگالی خواهیم پرداخت. همچنین اثرات اتلاف فازی را صراحتاً در معادله‌ی اساسی وارد می‌نماییم. با استفاده از حل معادله اساسی و تعریف قطبش، پذیرفتاری الکتریکیِ مدل را محاسبه و نشان می‌دهیم که بسامد تشدید جذب، به سببِ جابجایی دوپلری، به تعدادِ ورتکس‌های موج وابسته می‌شود. از نتایج مهم این مقاله آن است که می‌توان با اندازه‌گیری طیف جذب، عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای (تعداد ورتکس‌ها) موج را استخراج نمود.

کلید واژه- اتلاف‌های فازی، انتقال تکانه‌یِ زاویه‌ای، برهمکنش اتم با میدان لاگر-گاوسی، حرکت مرکز جرم، ضریب جذب

Shift in the *Atomic* Absorption Resonance Frequency Due to Transfer of Angular Momentum from Laguerre-Gaussian Waves

Somaye Abbaszadeh, Saheb Samimi and Mohammadmehdi Golshan

Physics Department, Shiraz University, Shiraz, Iran, 71946-84795

Abstract-The present article is concerned with the effects of phase damping and the motion of atomic center-of-mass involved in the interaction of a Laguerre-Gaussian wave and two-level atoms. To pursue this aim, we first present the total Hamiltonian, including both the electronic and center-of-mass Hamiltonians and then proceed to solve the corresponding master equation. To this end, the phase damping is explicitly included into the master equation. Making use of the solution to the later the polarization and, consequently, the corresponding susceptibility are calculated. We then demonstrate that the resonance frequency in the absorption spectrum, the detail of which depending on the transfer of orbital angular momenta (i.e., the number of vortices in the wave) suffers a shift. The present article, therefore, suggests that by a measurement on the absorption spectrum, the number of vortices in the Laguerre-Gaussian beam can be determined.

Keywords: Absorption Coefficient, Angular Momentum Transfer, Interaction of Atoms and Laguerre-Gaussian Waves, Motion Of Atomic Center-of-Mass, Phase Damping,

۱- مقدمه

پرتوهای لاگر-گاوسی[۱] دسته مهمی از پرتوهای نوری با توزیع فضایی غیریکنواخت می‌باشند. این پرتوها خروجی لیزرهای دارای کاواک با تقارن استوانه‌ای و تحت تقریب پیرامحوری[۲] را توصیف کرده و دسته‌ای از جواب‌های معادله‌ی هلمهولتز[۳] هستند [۱]. از ویژگی‌های این پرتوها حمل تکانه‌ی زاویه‌ای مداری و اسپینی (به عبارت دیگر، ورتکس‌های نوری[۴] [۲] بوده و از این‌رو کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف پیدا نموده‌اند [۳]. از مهم‌ترین کاربرد آن‌ها می‌توان به ارتباطات نوری، انتقال و پردازش اطلاعات کوانتومی (در قالب ورتکس‌های نوری) اشاره نمود [۴]. مهم‌ترین راه مشاهده تکانه زاویه‌ای این پرتوها، برهمکنش آن‌ها با ماده است [۵]. تکانه‌زاویه‌ای پرتوهای لاگر-گاوسی در برهمکنش با اتم به ماده منتقل می‌شود. از اثرهای مهمی که در این برهمکنش رخ می دهند می‌توان از جابجایی سمتی دوپلر در بسامد تشدیدِ اتمی و گشتاور القایی وارد بر اتم نام برد [۶]. از این‌رو در این مقاله به مطالعه‌ی انتقال تکانه زاویه‌ای(مداری) از یک موج الکترومغناطیسی با نمایه-ی لاگر-گاوسی به کل سامانه‌ای از الکترون و همچنین ***مرکز جرم*** (هسته، یون) می‌پردازیم. از طرف دیگر، حرکت مرکز جرم، باعث برخورد الکترون با سایر اجزا شده و حالت-ها دچار واهلش می‌گردند. تفاوت اساسیِ مقاله حاضر و گزارش‌های قبل در آن است که اثر موج بر مرکز جرم و پدیده‌ی واهلش همزمان در محاسبات ما در نظر گرفته می-شود [۷]. برای این منظور الکترون را، در دستگاه مختصات مرکز جرم اتم، دوترازه درنظر می‌گیریم و اثر میدان لاگر–گاوسی بر مرکز جرم (به عنوان ذره‌ای باردار) را صریحاً در برهمکنشِ الکترومغناطیسی وارد می‌نماییم. از آن‌جا که مرکز جرم در مطالعه‌یِ حاضر با موج لاگر-گاوسی نیز برهمکنش می‌کند، بسامدهای گذارِ الکترونی دچار یک جابجایی دوپلری می‌گردند. با توجه به آن‌که جابجایی دوپلری متأثر از انتقال تکانه‌زاویه‌ایِ مداری به اتم است انتظار می‌رود که بسامد تشدید در جذبِ انرژیِ الکترومغناطیسی نیز دچار جابجایی شود. در نتیجه با اندازه-گیریِ جابجایی بسامد تشدید در جذب می‌توان به روشی برای اندازه‌گیری تکانه‌ی مذکور دسترسی یافت. به عنوان سازمان مقاله و نیز ارائه‌ی خلاصه‌ای از مطالبی که در پی خواهد آمد، پس از مقدمه، بخش ۲ به مرورِ ویژگی‌های میدان‌های لاگر-گاوسی با تاکید بر اندازه حرکت زاویه‌ای آن‌ها اختصاص دارد. در بخش ۳ به توصیف برهمکنشِ سامانه‌ی اتمی و میدان‌های لاگر-گاوسی همراه با هامیلتونی متناظر خواهیم پرداخت. ازآن‌جا که در این بررسی، همراه با حرکت مرکز جرم که باعث برخورد اتم‌ها می‌شود، تابش خودبخود نیز منظور می‌شود، بخش ۴ اختصاص به محاسبه-ی ماتریس چگالی از معادله‌ی اساسی[۵] و سپس پذیرفتاریِ الکتریکی خواهد داشت. نتایج محاسبات و توجیه فیزیکی آن موضوع آخرین بخش مقاله می‌باشد.

۲- مروری بر ویژگی‌های امواج لاگر-گاوسی

جهت استفاده‌های بعدی، در این بخش به ویژگی‌های امواج لاگر-گاوسی همراه با تاکید بر اندازه حرکت زاویه‌ای، مداری و اسپینی، می‌پردازیم. اگر معادله‌ی هلمهولتز، ناشی از معادلات ماکسول در خلأ، را در مختصات استوانه‌ای نوشته و حل‌های آن را به صورت $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}\, u(\rho,\varphi,z)\, e^{ikz} + c.c.$ ($\hat{e}$ قطبش میدان را مشخص می‌کند) در نظر گیریم، نتیجه زیر حاصل می‌شود [۱].

$$u(\rho,\varphi,z) = \frac{c}{(1+z^2/z_R^2)^{1/2}} \left(\sqrt{2}\,\rho / w(z)\right)^{|l|} \times L_p^{|l|}\left(2\rho^2 / w^2(z)\right) e^{-\rho^2/w^2(z)} \times \exp\{i\,(k\,\rho^2 z / 2(z^2+z_R^2)) + |l|\varphi + (2p+|l|+1)\tan^{-1}(z/z_R) + k\,z)\} \qquad (۱)$$

لازم به ذکر است که در به دست آوردن حل (۱) از تقریب پیرامحوری استفاده شده است و (در نمادهای استاندارد) $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ بازه رایلی، $w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{z^2}{z_R^2}}$ اندازه‌ی لکه در هر z و $L_p^{|l|}$ چند جمله‌ای‌های لاگر از مرتبه‌ی p

---

[۱] Laguerre-Gaussian
[۲] Paraxial Approximation
[۳] Helmholtz Equation
[۴] Optical Vortex
[۵] Master Equation

و درجه (اندازه) l هستند. می‌توان نشان داد که برای موج لاگر-گاوسی، تکانه زاویه‌ای میدان الکترومغناطیسی، $\vec{J}=\varepsilon_0\int \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\,d^3\vec{r}$، به دو جزء ***مداری*** و ***اسپینی*** تقسیم می‌شود [۴]. جزء مداری آن که صراحتاً از طریق معادله‌ی(۱) به l وابسته است،

$$\vec{L}=\varepsilon_0\sum_i\int d^3\vec{r}\,E_i^{\perp}(\vec{r}\times\nabla)A_i \qquad (۲)$$

و جزء اسپینی آن برابر است با،

$$\vec{S}=\varepsilon_0\int d^3r\,\vec{E}^{\perp}\times\vec{A} \qquad (۳)$$

یک واقعیت شناخته شده آن است که در امواج لاگر-گاوسی با قطبش تخت، تکانه اسپینی صفر می‌باشد [۴]. در ادامه به برهمکنش یک میدان لاگر-گاوسی (قطبیده‌ی خطی) با اتم‌های دوترازه، اثر تکانه زاویه‌ای موج بر بسامد تشدید و ضریب جذب، خواهیم پرداخت.

۳- برهمکنش اتم‌های دوترازه و موج لاگر-گاوسی در حضور اتلاف‌هایِ فازی

از آن‌جا که در این گزارش اتلاف‌های فاز شامل برخوردها و نیز واهلشِ‌حالت‌های الکترونی در نظر گرفته می‌شوند، با آنسامبلی آمیخته مواجه خواهیم بود. توصیف حالت چنین آنسامبلی تنها از طریق عملگر (ماتریس) چگالی امکان‌پذیر است. برای سامانه‌ی اتمی با اتلاف‌های فازی عملگر چگالی از معادله‌ی اساسی [۸]،

$$\dot{\rho}=-\frac{i}{\hbar}[H,\rho]-\frac{1}{2}\{\Gamma,\rho\} \qquad (۴)$$

که در آن H هامیلتونی کل و Γ عملگر ناهمدوسی سامانه می‌باشد، نتیجه می‌شود. اگر تکانه‌ی خطیِ مرکز جرم در اتم دوترازه $\vec{P}$، تراز برانگیخته $\langle 2|$ و تراز پایه $\langle 1|$ باشند، هامیلتونی کل اتم در برهمکنش با میدان الکتریکی خارجی عبارت خواهد بود از،

$$H=\frac{P^2}{2M}+\hbar\omega_0\sigma_+\sigma_- -\vec{\mu}\,.\,\vec{E}(\vec{R}) \qquad (۵)$$

که در آن $\vec{\mu}$ عملگر دوقطبی الکتریکی، M جرم اتمی و $\sigma_+=\sigma_-^{\dagger}=|2\rangle\langle 1|$ عملگر نردبانی الکترونی می‌باشند. خاطر نشان می‌شود که رابطه‌ی (۵) در تقریب دوقطبی الکتریکی نوشته شده و از این‌رو میدان الکتریکی در محل مرکز جرم، $\vec{R}$، منظور می‌گردد. برای حل معادله (۴) معمول است که، با توجه به جرم بزرگ اتمی، از تقریب بی دررو[۶] $\rho=\rho_{c.m.}\otimes\rho_e$ و $\rho_{c.m.}=\delta(\vec{R}-\vec{R}_0)\delta(\vec{P}-\vec{P}_0)$ استفاده شود [۶]. در این‌صورت ماتریس چگالی 2×2 خواهد بود و میدان در محل اولیه‌ی مرکز جرم محاسبه می‌شود. همچنین فرض می‌شود که واهلشِ تراز اتمی $\langle 2|$ به دو صورت ناکشسان، با نرخ Γ_1، و کاملاً کشسان، با نرخ Γ_2، رخ می‌دهد که در این صورت $\Gamma_{ij}=\delta_{ij}\gamma_i$ ، $i,j=1,2$ بوده و برای درایه‌های رابطه‌ی (۴) خواهیم داشت [۸]،

$$\frac{d}{dt}\rho_{21}=-(i\omega_0+\Gamma_2)\rho_{21}+\frac{i}{\hbar}V_{21}(\rho_{22}-\rho_{11}) \qquad (۶)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_{22}-\rho_{11})=-((\rho_{22}-\rho_{11})-(\rho_{22}-\rho_{11})^{eq})\Gamma_1 -\frac{2i}{\hbar}(V_{21}\rho_{12}-\rho_{21}V_{12}) \qquad (۷)$$

در این‌جا متذکر می‌شویم که در استخراج دو معادله اخیر از $\rho_{22}+\rho_{11}=(\rho_{22}+\rho_{11})^{eq}=1$، بهنجارش عملگر چگالی، استفاده شده است. معادله‌ی اخیر بهنجارش ماتریس چگالی در هر لحظه را به ماتریس چگالی در تعادل (پس از آن‌که واهلش به‌طور کامل انجام پذیرفت) مربوط می‌سازد [۸]. در تقریب امواج چرخان فقط $V_{21}=-\mu_{21}E(\vec{R})e^{-i\omega t}$ در نظر گرفته می‌شود. از آن‌جا که در تقریب بی دررو داریم،

$$E(\vec{R})=E(\vec{R}_\circ)=\varepsilon(\vec{r}_\circ)e^{i\nabla\theta(\vec{r}_\circ).\vec{v}t} \qquad (۸)$$

که در آن $\vec{r}_\circ$ مکان اولیه مرکز جرم اتم، $\varepsilon(\vec{r}_\circ)$ و $\theta(\vec{r}_\circ)$ به ترتیب دامنه و فاز موج لاگر-گاوسی (به رابطه‌ی (۱) مراجعه شود) می‌باشند، بنابراین در معادلات (۶) و (۷)، $V_{21}=-\mu_{21}\varepsilon(\vec{r}_0)e^{-i[\omega-\nabla\theta(\vec{r}_0).\vec{v}]t}$ ، جایگزین می‌شود. از آن‌جا که درایه‌های ماتریس چگالی پس از واهلش به سمت حالت تعادلی میل می‌کند، آن‌ها را متناسب با $\exp\{-i[\omega-\nabla\theta(\vec{r}_0).\vec{v}]t\}$ نوشته و دو معادله‌ی (۶) و (۷) را در حالت پایا حل کرده، به جواب زیر می‌رسیم،

$$\rho_{21}(t)=\{\mu_{21}\varepsilon(\vec{r}_0)e^{-i(\omega-\nabla\theta(\vec{r}_0).v)t}\} \times\{(\rho_{22}-\rho_{11})^{eq}(1+\Delta^2/\Gamma_2^2)\}/ \{\hbar(\Delta+i\Gamma_2)\}\times\{1+\Delta^2/\Gamma_2^2+\Omega^2/\Gamma_1\Gamma_2\} \qquad (۹)$$

---

[۶] Adiabatic Approximation

واضح است که ناکوکی، Δ، از طریق $\theta(\vec{r}_0)$ به فاز موج لاگر-گاوسی در رابطه‌ی (۱) وابسته است. برای سهولت فرض می‌شود که مرکز جرم در $z=0$ قرار داشته و حول محور z ها دوران می‌کند. بدین ترتیب، ناکوکی به صورت، $\Delta=\omega-\omega_0-\frac{l}{r}v_{\varphi}$، در خواهد آمد. حال می‌دانیم که پذیرفتاری الکتریکی (خطی)، χ، برای یک محیط همسانگرد به صورت $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}$ که درآن قطبش ماده، $P(t)=Tr(\mu\rho)=N\mu_{12}\rho_{21}$، می‌باشد، خواهد بود[۸]. بدین ترتیب ضریب جذب نوری، قسمت موهومی χ، برابر می‌شود با،

$$\chi_{\mathrm{Im}}=\frac{\alpha_0}{\omega_0/c}\left(\frac{1}{1+\frac{\Delta^2}{\Gamma_2^2}+\frac{\Omega^2}{\Gamma_1\Gamma_2}}\right) \qquad (۱۰)$$

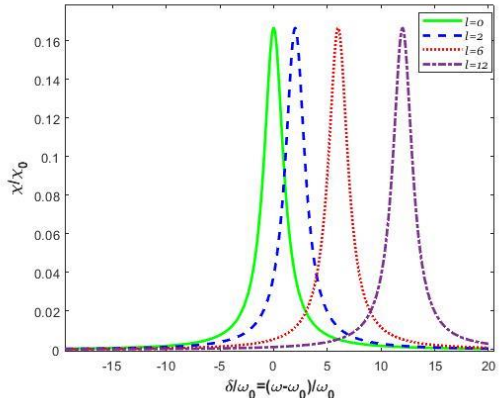
که در آن α_0 مطابق زیر تعریف شده است:

$$\alpha_0=-\left\{\omega_0 N/c\,\frac{(\rho_{22}-\rho_{11})^{eq}\left|\mu_{21}\right|^2}{\varepsilon_0\hbar\Gamma_2}\right\} \qquad (۱۱)$$

در معادله‌ی (۱۰)، $\Omega=2\left|\mu_{12}\right|\varepsilon(\rho_\circ,z=0)/\hbar$ بسامد رابی (وابسته به مکان مرکز جرم و تکانه زاویه‌ای موج) می-باشد. از رابطه‌ی (۱۰) و تعریف فوق‌الذکر از ناکوکی، واضح است که شرط تشدید، $\Delta=0$، تنها با تنظیم تکانه زاویه‌ای موج (تعداد ورتکس‌ها) امکان‌پذیر است.

۱- بحث و نتیجه‌گیری

در شکل ۱ منحنی ضریب جذب بهنجار شده به $\chi_0=\alpha_0 c/\omega_0$ بر حسب $\delta=(\omega-\omega_0)/\omega_0$ و انتخاب $v_\varphi/r=\omega_0$ ارائه شده است. منحنی‌های این شکل برای موج‌های لاگر-گاوسی با تکانه‌های زاویه‌ای مداری متفاوت رسم شده است. در این شکل همچنین $\Gamma_1=2\Gamma_2=2\Gamma$ و $\Omega=\sqrt{10}\Gamma$ [۶] [۸] منظور شده است. در تایید آن‌چه گذشت، این شکل نشان می‌دهد که با افزایش عددِ کوانتومیِ تکانه زاویه‌ای مداری(تعداد ورتکس‌ها) در موج، بسامد تشدید به سمت بسامدهای بالاتر انتقال پیدا می‌کند. از این شکل همچنین پیش‌بینی می‌شود که پهنای طیف مستقل از عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای مداری می‌باشد (هرچند که این نکته را ما صراحتاً□ اثبات نموده‌ایم،به خاطر کمبود جا از آوردن جزئیات آن خودداری شده است).



شکل۱: طیف جذب برای تکانه‌های زاویه‌ای، l، متفاوت. جابجایی بسامد تشدید جذب برای این مقادیر l کاملا مشخص است.

نتیجه‌ی قابل توجه در این مقاله آن است که با اندازه‌گیری طیف جذب در برهمکنش موج‌های لاگر-گاوسی با ماده‌ایی مانند منیزیم (مدل دو ترازه) می‌توان به تعداد ورتکس‌های موج پی برد.

مراجع

[1] Allen, Les, et al. "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes." Physical Review A 45.11 (1992): 8185.
[2] Barnett, Stephen M., et al. "On the natures of the spin and orbital parts of optical angular momentum." Journal of Optics 18.6 (2016): 064004.
[3] Yao, Alison M., and Miles J. Padgett. "Orbital angular momentum: origins, behavior and applications." *Advances in Optics and Photonics* 3.2 (2011): 161-204.
[4] Andrews, David L. Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces. Academic Press, 2011.
[5] Schmiegelow, Christian T., et al. "Transfer of optical orbital angular momentum to a bound electron." Nature communications 7 (2016).
[6] Allen, L., et al. "Atom dynamics in multiple Laguerre-Gaussian beams." Physical Review A 54.5 (1996): 4259.
[7] Kazemi, Seyedeh Hamideh, and Mohammad Mahmoudi. "Multi-photon resonance phenomena using Laguerre–Gaussian beams." Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 49.24 (2016): 245401.
[8] Boyd R W *Nonlinear Opt* 2008 (London: Academic Press)
[9]