

## درهم تنیدگی برهم نهی های مختلف حالت های همدوس فوتون\_افزوده

حمیدرضا کشاورز و غلامرضا هنرآسا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده - در این مقاله درهم تنیدگی برهم نهی های مختلف حالت های همدوس فوتون\_افزوده با استفاده از معیار توافق (تلاقی) بررسی شده است. نتایج نشان می دهد با افزایش اختلاف بین فوتون های افزوده شده در دو مد، درهم تنیدگی بیشتر می شود و بیشینه درهم تنیدگی در برهم نهی های منفی رخ می دهد.

کلید واژه - حالت های همدوس فوتون افزوده، درهم تنیدگی، برهم نهی، توافق (تلاقی).

## Entanglement of Different Superpositions of Photon-Added Coherent States

Hamidreza Keshavarz and Gholamreza Honarasa

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper, the entanglement of different superpositions of photon added coherent states is investigated using concurrence criterion. The results show that as the difference between photons added in the two modes increases, the entanglement increases and the maximum entanglement occurs in negative superpositions.

Keywords: Photon added coherent states, Entanglement, Superposition, Concurrence.

۱- مقدمه

حالت‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در زمینه‌ی نوسانگرهای هماهنگ معرفی شدند [۱]. حالت‌های همدوس فوتون\_افزوده که حالتی بین حالت‌های همدوس (شبهه ترین حالت کوانتومی به کلاسیک) و حالت‌های عددی (حالت کوانتومی خالص) بشمار می روند، حالت فوتون\_افزوده است که با به کارگیری مکرر عملگر خلق روی پایه‌های حالت همدوس به دست می‌آیند. این حالت‌ها نخستین بار توسط آگروال و تارا معرفی شدند [۲]. حالت‌های همدوس فوتون\_افزوده بسیار مورد توجه هستند زیرا دارای آمار زیرپواسونی و تابع ویگنر منفی هستند و این ویژگی‌ها آنها را در دسته حالت‌های غیرکلاسیکی قرار می دهد که برای کاربردهای اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب هستند [۳].

درهم تنیدگی یکی از مهم ترین ویژگی کوانتومی است و از آن را به عنوان یک منبع مهم و ارزشمند برای انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی استفاده می کنند [۴]. در این مقاله درهم تنیدگی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون\_افزوده را برای تعداد فوتون های افزوده مختلف و برهم نهی های مثبت و منفی بررسی خواهیم کرد.

۲- حالت‌های همدوس فوتون افزوده

حالت‌های همدوس فوتون\_افزوده به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$|\pm\alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m}|\pm\alpha\rangle}{m! \left[ L_m(-|\alpha|^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

که در آن  $|\pm\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$  حالت همدوس است و  $L_m(x)$  چند جمله‌ای لاگر از مرتبه  $m$  است.  $\hat{a}^{\dagger m}$  عملگر خلق است که  $m$  مرتبه مورد استفاده قرار گرفته است. هم پوشانی بین دو حالت بهنجار نشده همدوس با  $m$  و  $n$  فوتون افزوده  $(\hat{a}^{\dagger m}|\pm\alpha\rangle)$  و  $(\hat{a}^{\dagger n}|\pm\alpha\rangle)$  به صورت زیر به دست آید:

(۲)

$$\begin{aligned} \langle -\alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | -\beta \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \\ &\times \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^*{}^i (-\beta)^j}{\sqrt{i!} \sqrt{j!}} \langle i | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | j \rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \\ &\times \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^i (-1)^{m-n} \beta^{m-n} (m+1)!}{i!(i+m-n)!} \end{aligned}$$

۳- درهم تنیدگی

در این بخش به بررسی برهم نهی حالت‌های همدوس فوتون\_افزوده به عنوان حالت‌های دو قسمتی به صورت زیر می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} |\Psi^{AB}\rangle &= N(u \hat{a}^{\dagger m} | -\alpha \rangle_A \hat{b}^{\dagger n} | -\beta \rangle_B \\ &+ v \hat{a}^{\dagger n} | -\beta \rangle_A \hat{b}^{\dagger m} | -\alpha \rangle_B) \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن  $\hat{a}^{\dagger m} (b^{\dagger n})$  می‌تواند  $m(n)$  فوتون در مد  $\hat{a}$  زیر سیستم  $A$  ( $\hat{b}$  در زیر سیستم  $B$ ) تولید کند.  $u$  و  $v$  اعداد مختلطی هستند که معرف برهم نهی حالت‌ها هستند و از  $|u|^2 + |v|^2 = 1$  پیروی می‌کنند.  $N$  ضریب بهنجارش است و از رابطه زیر به دست می‌آید:

(۴)

$$\begin{aligned} N(u, v) &= \left[ L_m(-|\alpha|^2) L_n(-|\beta|^2) m! n! \right. \\ &\left. + 2e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} \operatorname{Re}(u^* v) \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^i (-1)^{m-n} \beta^{m-n} (m+i)!}{i!(i+m-n)!} \right|^2 \right]^{\frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

می‌توان دو کیوبیت به صورت زیر برای هر زیربخش تعریف کرد [۳]:

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv N_1 \hat{a}^{\dagger m} | -\alpha \rangle \\ |1\rangle &\equiv N_2 \left( \hat{a}^{\dagger n} | -\beta \rangle - Z N_1 \hat{a}^{\dagger m} | -\alpha \rangle \right) \end{aligned} \quad (5)$$

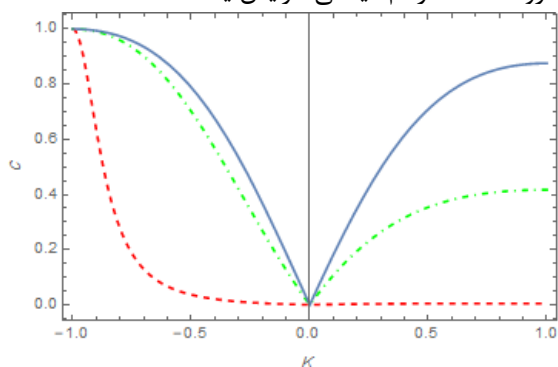
که در آن  $Z = N_1^* \langle -\alpha | \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} | -\beta \rangle$  از هم پوشانی بین دو حالت غیر متعامد با ضرایب بهنجارش زیر به دست می‌آید:

$$N_1 = \left[ L_m(-|\alpha|^2) m! \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهم‌نهی‌های منفی درهم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند و در برهم‌نهی مثبت نیز درهم‌تنیدگی رخ نمی‌دهد.

نمودار خط-نقطه برای  $n = 2$  و  $m = 12$  رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم‌تنیدگی به ازای  $k = -1$  رخ داده است و با شیب ملایم تری به نسبت نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در  $k = 0$  درهم‌تنیدگی به صفر میل می‌کند، اما برای برهم‌نهی مثبت، درهم‌تنیدگی با افزایش  $k$  افزایش می‌یابد که مقدار بیشینه آن در  $k = 1$  رخ می‌دهد و مقدار آن  $C = 0.4$  است.

نمودار خط توپر برای  $n = 2$  و  $m = 20$  رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه درهم‌تنیدگی در  $k = -1$  رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در  $k = 0$  درهم‌تنیدگی صفر می‌شود اما در برهم‌نهی منفی با شیب کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهم‌نهی مثبت هم افزایش درهم‌تنیدگی داریم و بیشینه درهم‌تنیدگی در  $k = 1$  رخ می‌دهد که مقدار آن  $C = 0.87$  است. بنابراین با افزایش تعداد فوتون‌های افزوده شده، درهم‌تنیدگی افزایش یافته است.



شکل ۱: ضریب توافق برحسب تابعی از  $k$ ، به ازای  $n = 2$  و  $m = 3$  (منحنی خط‌چین)،  $m = 12$  (منحنی خط-نقطه) و  $m = 20$  (منحنی توپر).

در شکل ۲ نیز تلاقی بر حسب  $k$  با در نظر گرفتن  $\alpha = \beta = 10$  به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است.

در این شکل نمودار خط چین به ازای  $n = 10$  و  $m = 3$  رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در  $k = -1$  ضریب توافق ما ۱ است که به معنای درهم‌تنیدگی کامل

$$N_2 = [L_n(-|\beta|^2)]^{n!} |ZN_1|^2 L_m(-|\alpha|^2)^{m!} 2e^{-\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{2}} \times \text{Re} \left[ ZN_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \alpha)^i (-\beta)^{*(m-n)} (m+i)!}{i!(i+m-n)!} \right]^{-1/2} \quad (7)$$

حالت (۳) را می‌توان بر حسب دو کیوبیت معرفی شده به صورت زیر نوشت:

$$|\psi^{AB}\rangle = \frac{N(u,v)}{N_1 N_2} (u|01\rangle + v|10\rangle + ZN_2(u+v)|00\rangle) \quad (8)$$

برای تعیین درجه در هم‌تنیدگی از معیار توافق یا تلاقی استفاده می‌کنیم [۵]. این معیار مقادیر بین صفر تا یک به خود می‌گیرد به نحوی که صفر نشان دهنده عدم وجود درهم‌تنیدگی و یک نشان دهنده درهم‌تنیدگی کامل است. این معیار برای حالت (۸) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = \left| \langle \psi^{AB} | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi^{AB} \rangle \right| \quad (9)$$

که در آن  $\sigma_y$  ماتریس  $y$  پائولی است. در نهایت معیار توافق یا تلاقی برای برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون افزوده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2 \left( \frac{N(u,v)}{N_1 N_2} \right)^2 |uv| \quad (10)$$

#### ۴- نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی میزان در هم‌تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده برای نسبت‌های مختلف برهم‌نهی به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف می‌پردازیم.

به این منظور نسبت برهم‌نهی  $u$  و  $v$  را برحسب ضریب بیان می‌کنیم  $k = u/v$  که  $k$  های منفی بیانگر برهم‌نهی منفی و  $k$  های مثبت، برهم‌نهی مثبت را بیان می‌کند.

در شکل ۱، تلاقی بر حسب  $k$  با در نظر گرفتن  $\alpha = \beta = 10$  به ازای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف رسم شده است. در این شکل نمودار خط‌چین به ازای  $n = 2$  و  $m = 3$  رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌کنیم در  $k = -1$  معیار توافق ۱ است که به معنای درهم‌تنیدگی کامل است اما ضریب  $C$  به مرور در امتداد  $k$

حالت‌های همدوس فوتون افزوده برای برهم‌نهی‌های مثبت و منفی به  $|m-n\rangle$  بستگی دارد و هر چه این مقدار بزرگتر باشد میزان درهم‌تنیدگی حالت‌ها بیشتر است.

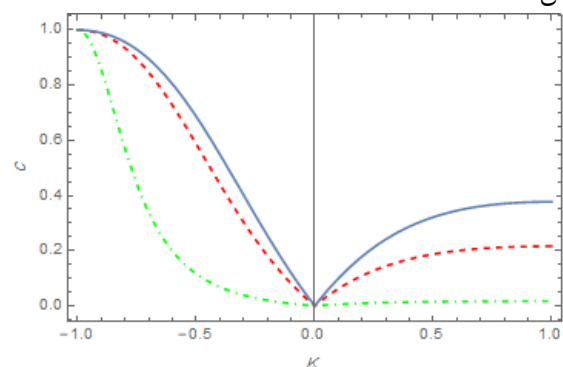
### مراجع

- [1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikrozur Makromechanik", Naturwissenschaften, Vol. 14, pp. 664-666, 1926.
- [2] G. S. Agarwal, K. Tara, "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", Phys. Rev. A, Vol. 43, pp. 492-497, 1991.
- [3] F. A. Domínguez-Serna, F. J. Mendieta-Jimenez, F. Rojas, "Entangled photon-added coherent states", Quant. Inf. Proc., Vol. 15, pp. 3121-3136, 2016.
- [4] R. Jozsa, N. Linden, "On the role of entanglement in quantum-computational speed-up", Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 459, pp. 2011-2032, 2003.
- [5] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits", Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 2245-2248, 1998.

است اما ضریب  $C$  به مرور در امتداد  $k$  به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین در این حالت به ازای برهم‌نهی‌های منفی درهم‌تنیدگی از حالت بیشینه به سمت صفر میل می‌کند. در برهم‌نهی مثبت ضریب  $C$  از صفر تا  $C = 0.2$  افزایش می‌یابد که بیشینه آن در  $k = 1$  است.

نمودار نقطه-خط-نقطه برای  $n = 10$  و  $m = 12$  رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه در هم‌تنیدگی به ازای  $k = -1$  رخ داده است و با شیب تند تری نسبت به نمودار قبلی به سمت صفر میل می‌کند. در برهم‌نهی‌های مثبت تقریباً درهم‌تنیدگی صفر است.

نمودار خط توپر برای  $n = 10$  و  $m = 20$  رسم شده است. در این نمودار نیز حالت بیشینه درهم‌تنیدگی در  $k = -1$  رخ داده است و همانند دو نمودار قبل در  $k = 0$  درهم‌تنیدگی صفر می‌شود اما در برهم‌نهی منفی ضریب  $C$  با شیب کمتری نسبت به دو نمودار قبل به سمت صفر میل می‌کند. برای برهم‌نهی مثبت هم افزایش درهم‌تنیدگی داریم و بیشینه ضریب  $C$  در  $k = 1$  رخ می‌دهد که مقدار آن  $C = 0.4$  است.



شکل ۲: ضریب توافق برحسب تابعی از  $k$ ، به ازای  $n = 10$  و  $m = 3$  (منحنی خط‌چین)،  $m = 12$  (منحنی خط-نقطه) و  $m = 20$  (منحنی توپر).

### ۵- نتیجه‌گیری

ضریب توافق یا تلاقی به ازای  $k = -1$  بیشینه است. بنابراین بیشترین درهم‌تنیدگی هنگامی رخ می‌دهد که برهم‌نهی منفی ( $u = -v$ ) باشد. در حالت کلی همانطور که از شکل‌ها مشخص است به ازای  $|k|$  یکسان، همواره میزان درهم‌تنیدگی در برهم‌نهی منفی، بیشتر از میزان درهم‌تنیدگی در برهم‌نهی مثبت است.

برای سایر حالت‌ها نیز درهم‌تنیدگی به تعداد فوتون‌های افزوده شده بستگی دارد و میزان درهم‌تنیدگی برهم‌نهی