

## تلاقی یک سامانه دو کیوبیتی در حضور یک میدان کلاسیکی در یک محیط مشترک

ساره گل کار، محمد کاظم توسلی

گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

چکیده - در این مقاله دینامیک درهم تنیدگی یک سامانه کوانتومی متشکل از دو کیوبیت در برهم کنش با یک میدان کوانتیده و هم-چنین یک میدان کلاسیکی اعمالی را در یک محیط مشترک در دمای صفر بررسی می کنیم. نشان خواهیم داد که در رژیم جفت شدگی قوی، با اعمال میدان کلاسیکی میزان درهم تنیدگی سامانه در حضور نامیزانی و با کنترل بسامد رابی افزایش می یابد. هم چنین، ملاحظه خواهیم کرد که حفظ درهم تنیدگی در رژیم جفت شدگی قوی نسبت به رژیم جفت شدگی ضعیف در حضور میدان کلاسیکی به طور چشم گیری بیشتر است.

کلید واژه- درهم تنیدگی، بسامد رابی، رژیم جفت شدگی قوی و ضعیف، تلاقی.

## Concurrence of a two-qubit system in the presence of a driven classical field in a common reservoir

S. Golkar, M. K. Tavassoly

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper, we consider the dynamics of two-qubit entanglement where each qubit interacts with a quantized as well as a classical driving field that is coupled with a common reservoir at zero temperature. In the strong coupling regime, by applying the classical driving field the amount of entanglement of the system can be increased in the off-resonance condition and by controlling the classical field (the Rabi frequency). Also, the results show that entanglement preservation in the strong coupling regime is more visible than in the weak coupling regime.

Keywords: Entanglement, Rabi frequency, Strong and weak coupling regimes, Concurrence.

## ۱- مقدمه

لذا کمیت حقیقی بدون بعد  $\alpha_j$ ,  $j=1,2$  که وابسته به مکان نسبی کیوبیت درون کاواک است را معرفی می‌کنیم. از آنجا که تبدیل یکانی، ویژه‌مقادیر سامانه را تغییر نمی‌دهد در چارچوب مرجع چرخان با تبدیل یکانی  $U(t) = e^{-i\omega_L(\sigma_z^A + \sigma_z^B)t/2}$  هامیلتونی مؤثر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_{\text{eff}} = U^\dagger(t) H U(t) - i U^\dagger(t) \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$= H_{\text{eff}}^1 + H_{\text{eff}}^2$$

به طوری که:

$$H_{\text{eff}}^1 = \frac{\delta}{2}(\sigma_z^A + \sigma_z^B) + \Omega(\sigma_x^A + \sigma_x^B) \quad (3)$$

$$H_{\text{eff}}^2 = \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + [\sum_k g_k a_k (\alpha_1 \sigma_+^A + \alpha_2 \sigma_+^B) e^{i\omega_L t} + H.C.]$$

و  $\delta = \omega_0 - \omega_L$ . هامیلتونی  $H_{\text{eff}}^1$  با قطری کردن به صورت  $\frac{\omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_z^A + \tilde{\sigma}_z^B)$  ساده می‌شود که  $\omega_1 = \sqrt{\delta^2 + 4\Omega^2}$  و  $\tilde{\sigma}_z^{A,B} = |1\rangle_j \langle 1| - |0\rangle_j \langle 0|$ ,  $(j=1,2)$  در پایه‌های جدید هستند که  $|1\rangle$  و  $|0\rangle$  حالت‌های پوشیده‌ای هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$|1\rangle_j = \cos \frac{\theta}{2} |e\rangle_j + \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle_j \quad (4)$$

$$|0\rangle_j = -\sin \frac{\theta}{2} |e\rangle_j + \cos \frac{\theta}{2} |g\rangle_j, j=1,2$$

که در آن  $\theta = \arctan(2\Omega/\delta)$ . در نهایت، با نوشتن هامیلتونی  $H_{\text{eff}}^2$  در پایه‌های جدید و اعمال تقریب موج چرخان، هامیلتونی مؤثر سامانه در پایه‌های جدید به شکل زیر داده می‌شود:

$$H'_{\text{eff}} = \frac{\omega_1}{2}(\tilde{\sigma}_z^A + \tilde{\sigma}_z^B) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \quad (5)$$

$$\cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) [\sum_k g_k a_k (\alpha_1 \tilde{\sigma}_+^A + \alpha_2 \tilde{\sigma}_+^B) e^{i\omega_L t} + H.c.]$$

با در نظر گرفتن یک برانگیختگی در کل سامانه، حالت اولیه را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$|\psi(0)\rangle = (c_1(0)|1\rangle_1 |0\rangle_2 + c_2(0)|0\rangle_1 |1\rangle_2) |0_k\rangle_R \quad (6)$$

لذا بردار حالت کل در زمان  $t$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = (c_1(t)|1\rangle_1 |0\rangle_2 + c_2(t)|0\rangle_1 |1\rangle_2) |0_k\rangle_R + \sum_k c_k(t) |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1_k\rangle_R \quad (7)$$

که حالت  $|0_k\rangle_R$ ، حالت خلا منبع و حالت  $|1_k\rangle_R$  مربوط به حالتی از منبع با یک برانگیختگی در مد  $k$  است. اکنون با حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، به معادلات جفت شده زیر می‌رسیم:

درهم‌تنیدگی کوانتومی نقش مهمی در نظریه اطلاعات کوانتومی و ارتباطات کوانتومی [۱] ایفا می‌کند، اما متأسفانه به علت برهم‌کنش گریزناپذیر بین یک سامانه کوانتومی واقعی و محیط اطراف آن میزان درهم‌تنیدگی در برخی موارد کاهش می‌یابد [۲]. در این سامانه‌ها نگهداری درهم‌تنیدگی کوانتومی برای مدت زمان طولانی در سامانه‌های فیزیکی یک مسأله مهم در کاربردهای نظریه اطلاعات کوانتومی است. دینامیک سامانه‌های کوانتومی باز به نوع محیطی که با سامانه برهم‌کنش می‌کند بستگی دارد. در رژیم مارکوفی (رژیم جفت‌شدگی ضعیف) رفتار درهم‌تنیدگی الزاماً یک رفتار نمایی است و درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت با گذشت زمان کاهش می‌یابد [۳]، در حالی که در رژیم غیرمارکوفی (رژیم جفت‌شدگی قوی) به خاطر حافظه طولانی مدت محیط، احیاء درهم‌تنیدگی منجر به حفظ درهم‌تنیدگی می‌شود [۴]. اخیراً طرح‌واره‌های متعددی به منظور حفظ درهم‌تنیدگی معرفی شده است [۵، ۶]. در این مقاله با در نظر گرفتن یک سامانه دوکیوبیتی در یک محیط مشترک در دمای صفر با اعمال میدان کلاسیکی به بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی در دو رژیم گفته شده و حفظ درهم‌تنیدگی در آنها می‌پردازیم.

## ۲- مدل و معادلات اساسی

در این بخش دو کیوبیت درون یک منبع مشترک را در نظر می‌گیریم که تحت اعمال میدان کلاسیکی با بسامد  $\omega_L$  قرار گرفته‌اند. با فرض اینکه از برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین دو کیوبیت صرف‌نظر شود، هامیلتونی کلی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود [۷]:

$$H = \frac{\omega_0}{2}(\sigma_z^A + \sigma_z^B) + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \Omega e^{-i\omega_L t} (\sigma_+^A + \sigma_+^B) + \Omega e^{i\omega_L t} (\sigma_-^A + \sigma_-^B) + \sum_k g_k a_k (\alpha_1 \sigma_+^A + \alpha_2 \sigma_+^B) + H.C. \quad (1)$$

در رابطه بالا،  $\Omega$  بسامد رابی،  $\omega_0$  بسامد کیوبیت و  $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$  به ترتیب عملگرهای وارونی، بالابر و پایین‌بر اتمی.  $a_k$  و  $a_k^\dagger$  عملگرهای نابودی و آفرینش مد  $k$  ام میدان با بسامد  $\omega_k$  و  $g_k$  ثابت جفت‌شدگی بین کیوبیت و مد  $k$  ام میدان است. از آنجا که دو کیوبیت  $A$  و  $B$  در مکان‌های متفاوتی نسبت به مرکز کاواک هستند هر یک از آن‌ها مقادیر مختلفی از میدان کاواک را تجربه می‌کنند

درهم تنیده باشند) تغییر می کند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(t) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}, \quad (13)$$

که  $\lambda_i (i=1,2,3,4)$  ویژه مقادیر به ترتیب نزولی ماتریس هرمیتی  $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$  هستند که  $\rho^*$  همیوگ مختلط  $\rho$  است. با داشتن تابع موج کلی سامانه، می توان با گرفتن رد روی درجات آزادی محیط، ماتریس کاهش-یافته اتمی را در پایه های  $\{|1\rangle_1|1\rangle_2, |1\rangle_1|0\rangle_2, |0\rangle_1|1\rangle_2, |0\rangle_1|0\rangle_2\}$  در زمان  $t$  به دست آورد:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t) & 0 \\ 0 & c_1^*(t)c_2(t) & |c_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

پس از انجام محاسبات، تلاقی این سامانه توصیف شده به صورت زیر به دست می آید:

$$C(t) = 2|c_1(t)c_2^*(t)| \quad (15)$$

با توجه به معادلات  $c_1(t)$  و  $c_2(t)$ ، دینامیک درهم-تنیدگی سامانه مورد بررسی را در محیط مارکوفی و غیر-مارکوفی با فرض  $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  در حضور نامیزانی بررسی می کنیم. در شکل ۱ میزان درهم تنیدگی را توسط کمیت تلاقی در حضور میدان کلاسیکی و به ازای پارامترهای مختلفی از بسامد رابی رسم نموده ایم. نمودار بالایی در حالت تشدید و نمودار پایینی در شرایط غیرتشدید در محیط غیرمارکوفی رسم شده است. نتایج ارائه شده در شکل ۱، حاکی از آن است که با افزایش نامیزانی و بسامد رابی میزان تلاقی بیشتر شده و به دلیل حافظه طولانی مدت محیط غیرمارکوفی تلاقی سامانه دوکیوبیتی به بیشینه مقدار خود (یک) رسیده است و غیرمارکوفی بودن محیط منجر به نوسانات درهم تنیدگی و احیای آن شده است. در شکل ۲، تلاقی سامانه برحسب  $\tau = \gamma_0 t$  در حالت تشدید و غیرتشدید و در محیط مارکوفی (رژیم جفت شدگی ضعیف) رسم شده است. در این شکل مشاهده می کنیم که مارکوفی بودن محیط منجر به میرایی تلاقی به صورت نمایی می شود و در نهایت به حالت های غیردرهم تنیده می رسیم. هم چنین در می یابیم که با افزایش بسامد رابی و پارامتر نامیزانی میزان نگهداری درهم تنیدگی هم افزایش می یابد.

$$\dot{c}_1(t) = -\cos^4 \frac{\theta}{2} \int_0^t dt_1 f(t-t_1) [\alpha_1^2 c_1(t_1) + \alpha_1 \alpha_2 c_2(t_1)], \quad (8)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\cos^4 \frac{\theta}{2} \int_0^t dt_1 f(t-t_1) [\alpha_1 \alpha_2 c_1(t_1) + \alpha_2^2 c_2(t_1)],$$

تابع هم بستگی  $f(t-t_1)$  مربوط به چگالی طیفی  $J(\omega)$  است که به صورت زیر بیان می شود:

$$f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega) \exp[i(\omega_L + \omega_1 - \omega)(t-t_1)]. \quad (9)$$

با انتخاب تابع توزیع چگالی طیفی به شکل لورنتسی  $[\lambda]$ :

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega - \Delta)^2 + \lambda^2} \quad (10)$$

شکل دقیق  $c_1(t)$  و  $c_2(t)$  مشخص می گردد. در اینجا  $\omega_0$  بسامد گذار اتمی،  $\Delta$  نامیزانی بین بسامد اتمی و بسامد مرکزی میدان، پارامتر  $\lambda$  پهنای توزیع لورنتسی و  $\gamma_0$  مربوط به واپاشی اتم برانگیخته در حد مارکوفی است. به طور کلی دو رژیم جفت شدگی ضعیف و قوی وجود دارد، در رژیم جفت شدگی ضعیف،  $\gamma_0 < \frac{\lambda}{2}$  و زمان واهلش از زمان هم بستگی محیط بزرگتر است و رفتار سامانه مارکوفی نمایی است. اما در رژیم جفت شدگی قوی،  $\gamma_0 > \frac{\lambda}{2}$  و زمان هم بستگی محیط از زمان واهلش بزرگتر بوده و رفتار سامانه لزوماً یک رفتار غیرمارکوفی است بنابراین اثرات غیرمارکوفی مانند احیا و نوسانات درهم تنیدگی غالب می شوند که این به دلیل حافظه طولانی مدت محیط است.

با استفاده از تبدیلات لاپلاس، دامنه های احتمال  $c_1(t)$  و  $c_2(t)$  به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$c_1(t) = r_2^2 c_1(0) - r_1 r_2 c_2(0) + (r_1^2 c_1(0) + r_1 r_2 c_2(0)) \xi(t) \quad (11)$$

$$c_2(t) = r_1^2 c_2(0) - r_1 r_2 c_1(0) + (r_2^2 c_2(0) + r_1 r_2 c_1(0)) \xi(t)$$

که پارامترهای جفت شدگی  $r_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, j=1,2$

نسبی با  $r_1^2 + r_2^2 = 1$  هستند و از تعاریف زیر بهره جسته-ایم:

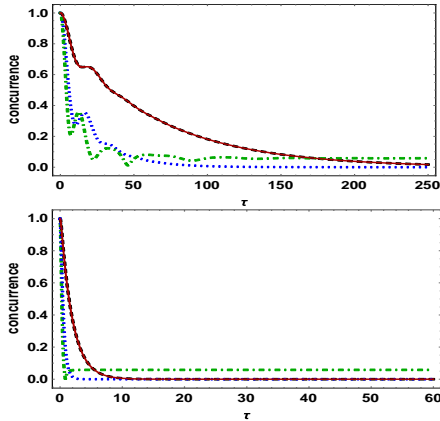
$$\xi(t) = e^{-\frac{(\mu-i\Delta)t}{2}} [\cosh(\frac{\epsilon t}{2}) + \frac{\mu-i\Delta}{\epsilon} \sinh(\frac{\epsilon t}{2})], \quad (12)$$

$$\epsilon = \sqrt{(\mu-i\Delta)^2 - \frac{\gamma_0 \lambda (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{2} (1 + \cos \theta)^2}, \mu = \lambda + i\delta - i\omega_1$$

### ۳- دینامیک درهم تنیدگی

برای تعیین میزان درهم تنیدگی از معیار تلاقی [۹] استفاده می کنیم. تلاقی بین صفر (وقتی که حالت دو کیوبیت جداپذیر باشد) و یک (وقتی که کیوبیت ها کاملاً

می‌کنیم که با انتخاب پارامتر جفت‌شدگی  $r_1 = 0, 1, 1/\sqrt{2}$ ، میزان تلاقی سامانه بعد از گذشت زمان کاهش می‌یابد و در انتها به صفر می‌رسد و درهم‌تنیدگی سامانه از بین خواهد رفت. از طرف دیگر به ازای  $r_1 = \sqrt{3}/2$ ، مشاهده می‌کنیم که تلاقی به مقدار پایایی غیرصفر  $C(t) \approx 0.058$  کاهش می‌یابد و درهم‌تنیدگی به صفر نمی‌رسد.



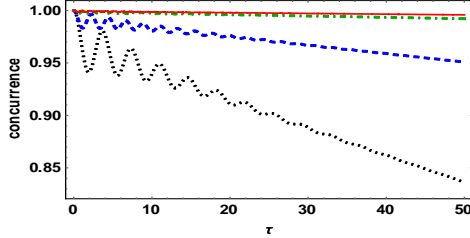
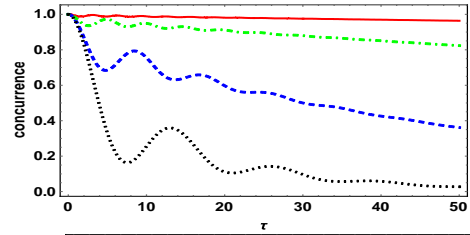
شکل ۳: کمیت تلاقی برحسب  $\tau = \gamma_0 t$  به ازای  $\Delta = 0$  و  $\Omega = 0.1\gamma_0$ ، در محیط غیرمارکوفی (شکل بالا) و محیط مارکوفی (شکل پایین).  $r_1 = 0$  (خط پیوسته)،  $r_1 = 1$  (خط چین)،  $r_1 = \sqrt{3}/2$  (نقطه-خط) و  $r_1 = 1/\sqrt{2}$  (نقطه-چین).

#### ۴- نتیجه‌گیری

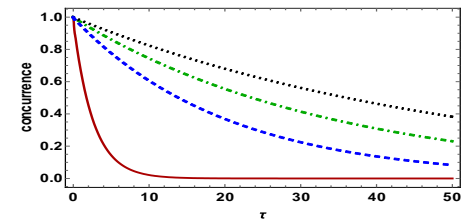
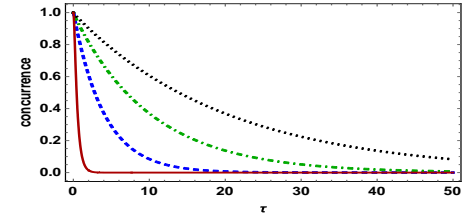
در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی یک سامانه دو-کیوبیتی در یک محیط مشترک را بررسی کرده‌ایم. از نمودارهای رسم شده مشاهده کردیم که در محیط غیر-مارکوفی حفظ درهم‌تنیدگی نسبت به محیط مارکوفی بیشتر بوده و با اعمال میدان کلاسیکی و در حضور نامیزانی، با افزایش بسامد رابی میزان افزایش درهم‌تنیدگی نیز بیشتر شده است. هم‌چنین، حفظ درهم‌تنیدگی در مدت زمان طولانی‌تری تضمین می‌شود.

#### مراجع

- [1] M. A. Nielsen, I. L. Chuang; "Quantum Computation and Quantum Information"; (Cambridge University Press, 2000).
- [2] T. Yu and J. Eberly, Phys. Rev. Lett. **93** 140404 (2004).
- [3] C. Gardiner, P. Zoller; "Quantum Noise" (1999).
- [4] B. Bellomo, R. L. Franco, and G. Compagno, Phys. Rev. Lett. **99**, 160502 (2007).
- [5] X. Xiao, M.-F. Fang, Y.-L. Li, K. Zeng, C. Wu, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **42** 235502 (2009).
- [6] S. Maniscalco, F. Francica, R. L. Zaffino, N. L. Gullo, and F. Plastina, Phys. Rev. Lett. **100**, 090503 (2008).
- [7] P. Haikka and S. Maniscalco, Phys. Rev. A **81** 052103 (2010).
- [8] H.-P. Breuer and F. Petruccione; "The Theory of Open Quantum Systems", (New York: Oxford University Press, 2002).
- [9] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).



شکل ۱: کمیت تلاقی برحسب  $\tau = \gamma_0 t$  در محیط مشترک برای بسامدهای رابی متفاوت به ازای  $\Delta = 0$  (شکل بالا) و به ازای  $\Delta = \gamma_0$  (شکل پایین).  $\Omega = 0$  (خط پیوسته)،  $\Omega = 0.1\gamma_0$  (خط چین)،  $\Omega = \gamma_0$  (نقطه-خط) و  $\Omega = 3\gamma_0$  (نقطه-چین) در یک محیط غیر-مارکوفی  $\lambda = 0.1\gamma_0$  با فرض  $c_1(0) = c_2(0) = 1/\sqrt{2}$ .



شکل ۲: کمیت تلاقی برحسب  $\tau = \gamma_0 t$  در محیط مشترک برای بسامدهای رابی متفاوت به ازای  $\Delta = 20\gamma_0$  (شکل پایین).  $\Omega = 0$  (خط پیوسته)،  $\Omega = 5\gamma_0$  (خط چین)،  $\Omega = 10\gamma_0$  (نقطه-خط) و  $\Omega = 15\gamma_0$  (نقطه-چین) در یک محیط مارکوفی  $\lambda = 10\gamma_0$  با فرض  $c_1(0) = c_2(0) = 1/\sqrt{2}$ .

با مقایسه شکل ۱ و ۲ مشاهده می‌کنیم که حفظ درهم‌تنیدگی در محیط غیرمارکوفی از محیط مارکوفی بیشتر است. در شکل ۳، میزان درهم‌تنیدگی را توسط کمیت تلاقی در دو رژیم جفت‌شدگی قوی و ضعیف با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی از پارامتر جفت‌شدگی نسبی  $r_1 \neq r_2$  رسم نموده‌ایم.  $r_1 = 0$  و  $r_1 = 1$  هر دو نشان‌دهنده حالتی هستند که فقط یک کیوبیت با منبع برهم‌کنش کرده است و با در نظر گرفتن  $r_1 = 1/\sqrt{2}$ ، هر دو کیوبیت به صورت متقارن با منبع جفت شده‌اند و هم‌چنین به ازای  $r_1 = \sqrt{3}/2$  هر دو کیوبیت با مقادیر مختلفی از  $r_1$  و  $r_2$  با منبع برهم‌کنش می‌کنند. از نمودار رسم شده مشاهده