بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

بررسی نظری تولید هماهنگ دوم فضایی در پراش میدان نزدیک از ساختارهای دوره‌ای صرفاً دامنه‌ای در فواصل ربع-تالبوت آنها

داود حبری[۱] و سیف‌اله رسولی[۱،۲]

۱-دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان
۲- مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

چکیده – طرح شدت باریکه نوریِ همدوس و تخت پس از عبور از میان یک ساختار دوره‌ای فضایی که توری نامیده می‌شود، عیناً در فواصل مشخصی از آن ساختار، تکرار می‌شود. به این پدیده اثر تالبوت یا پدیده خود-تصویرسازی گویند. همچنین در فواصل میانی هر دو فاصله تالبوت پی در پی، که فواصل نیم-تالبوت نامیده می‌شود مجدداً همان ساختار شدت منتها با یک جابجایی عرضی به اندازه نصف گام طرح تناوبی اولیه نمایان می‌شوند. بعلاوه، در فواصل میانی دو فاصله تالبوت و نیم-تالبوت پی در پی، که فاصله ربع-تالبوت نامیده می‌شود، ساختار شدتی مشابه طرح اولیه منتها با گام فضایی نصف گام توری تشکیل می‌شود. به این پدیده می‌توان تولید هماهنگ دوم فضایی نام نهاد. در این مقاله به بررسی نظری تولید هماهنگ دوم فضایی در پراش میدان نزدیک از ساختارهای دوره‌ای صرفاً دامنه‌ای که در فواصل ربع-تالبوت آنها شکل می‌گیرند پرداخته می‌شود. در این کار تغییرات دامنه و فاز جبهه موج پراکنده شده از ساختارهای دوره‌ای در فواصل ربع-تالبوت آنها به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج بدست آمده در مورد مثال‌هایی نوعی اعمال و نتایج آنها ارائه می‌شود.

کلید واژه- ساختارهای دوره‌ای، توری، پراش میدان نزدیک، اثر تالبوت، فواصل ربع تالبوت، تولید هماهنگ دوم فضایی

Theoretical investigation of the spatial second harmonic generation in the near field diffraction from the pure amplitude periodic structures at their quarter-Talbot distances

Davud Hebri[1] and Saifollah Rasouli[1, 2]

1-Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran
2-Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran

Abstract- In the passing of a plane wave through a spatial periodic structure that we call it transmission grating, the intensity pattern at distinct propagation lengths can be reproduced as it was just after the grating. This effect is known as the Talbot effect or self-imaging phenomenon. At half-way between two successive Talbot distances again self-image of the initial amplitude pattern is produced but with a lateral spatial shift. This kind of image so called as half-Talbot image and its location called as half-Talbot distance. In addition, in half-way between a Talbot plane and the nearest half-Talbot plane we have another spatially periodic intensity pattern in which its period is equal to the half of the grating period. This kind of patterns is known as quarter-Talbot image or sub-image of the grating. Sometimes, this phenomenon is named as the spatial second harmonic generation. In this work, we will investigate by theoretical details the spatial second harmonic generation in the near filed diffraction from pure amplitude gratings at their corresponding quarter-Talbot distances and the maps of the amplitude and phase of the diffracted light beam are determined for different transmission gratings.

Keywords: Periodic structures, gratings, near field diffraction, Talbot effect, quarter-Talbot distances, spatial second harmonic generation.

۱-مقدمه

تاکنون بررسی طرح پراش میدان نزدیک از توری‌های عبوری در متون اپتیک بسیار مورد توجه قرار گرفته است و فرمول-بندی تشکیل تصاویر توری در فواصل تالبوت، نیم-تالبوت و ربع-تالبوت از آن با جزئیات ارائه شده است. با این وجود نکات بسیار مهم و اساسی‌ای هم در این حوزه وجود دارد که مورد غفلت بوده است. در این مقاله برای اولین بار تولید هماهنگ دوم فضاییِ ساختار میدان عبوری از توری‌های صرفاً دامنه‌ای در محل ربع-تالبوت آنها فرمول‌بندی می‌شود. با استفاده از فرمول‌بندی جامعی که بر اساس تحلیل فوریه بیان خواهد شد جزئیاتی جدید در نحوی تولید و مشخصات هماهنگ دوم فضایی توری‌های صرفاً دامنه‌ای مثلثی و دندانه‌ای ارائه می‌شود.

۲-مبانی ریاضی

با به توان دو رساندن یک تابع سینوسی دوره تناوب آن نصف می‌شود. بعبارتی هماهنگ دوم تابع اولیه بدست می‌آید. این ویژگی الزاماً برای هر تابع دوره‌ای برقرار نیست. در اینجا شرایط لازم برای اینکه یک تابع دوره‌ای، دوره تناوب مجذورش نصف دوره تناوب خودش باشد را بدست می‌آوریم. یک تابع حقیقی متناوت دلخواه $f(\mathrm{x})$ با دوره تناوب P را در نظر می‌گیریم و بسط فوریه‌ی آن را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(\frac{2in\pi x}{P}), \qquad (۱)$$

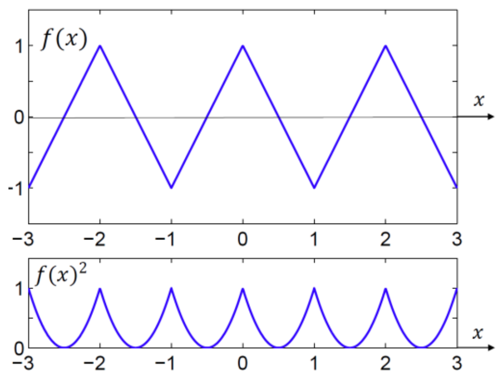
که در آن a_nها ضرایب بسط فوریه را نشان می‌دهند. چون $f(\mathrm{x})$ یک تابع حقیقی است داریم $a_{-n} = a_n^*$. بنابراین اگر a_n غیر صفر باشد a_{-n} نیز غیر صفر خواهد بود. همچنین یاد آور می‌شویم که مجموع چند تابع دوره‌ای، خود تابعی دوره‌ای است که دوره تناوبش برابر با کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوب تک‌تک تابع‌های اولیه است. حال مجذور تابع $f(\mathrm{x})$ را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$f(\mathrm{x})^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_m a_n \exp[\frac{2i(\mathrm{m}+n)\pi x}{P}]. \qquad (۲)$$

این بسط از مجموع بی نهایت جمله با دوره تناوب‌های $P_{mn} = \frac{P}{|m+n|}$ تشکیل شده است. اگر حالتی را فرض کنیم که بسط فوریه‌ی تابع $f(\mathrm{x})$ تنها شامل جملات با شمارنده زوج (n زوج) باشد دوره تناوب این تابع P نبوده و برابر $\frac{P}{2}$ است که با فرض اولیه‌ی ما در تناقض است. اگر بسط فوریه‌ی تابع $f(\mathrm{x})$ تنها شامل جملات با شمارنده فرد (n فرد) باشد آنگاه $|m+n|$ عدد زوج مثبت خواهد بود و می‌توان نوشت $P_{mn} = \frac{P}{2k}$ که در آن k یک عدد صحیح مثبت (طبیعی) می‌باشد. اگر کمینه مقدار $|m+n|$ برابر ۲ باشد عدد k از ۱ شروع می‌شود و کوچکترین مضرب مشترک P_{mn}ها (دوره تناوب تابع $f(\mathrm{x})^2$) برابر $\frac{P}{2}$ خواهد شد. پس می‌توان گفت که شرط لازم برای نصف شدن دوره تناوبِ مجذور یک تابع این است که بسط فوریه‌ی آن تابع تنها شامل جملات با شمارنده فرد بوده و همچنین حداقل اختلاف شمارنده‌های آن ۲ باشد. حال برای اثبات درستی این نتیجه‌گیری، دو مثال نوعی را بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع دوره‌ای مثلثی که بسط فوریه‌ی آن به شکل زیر است را در نظر می‌گیریم.

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{\substack{n=1 \\ odd}}^{+\infty} \frac{8}{(\pi n)^2} \cos(\mathrm{n}\pi\,\mathrm{x}), \qquad (۳)$$

که در آن نماد odd فرد بودن nها را نشان می‌دهد. نمودار این تابع و مجذور آن در شکل ۱ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود دوره تناوبِ مجذور این تابع نصف دوره تناوبِ آن است.

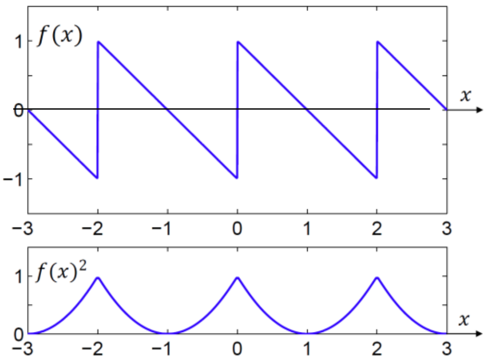


شکل ۱: نمودار یک تابع مثلثی و مجذور آن.

حال یک تابع دوره‌ای دندانه اره‌ای که بسط فوریه‌ی آن به شکل زیر است در نظر می‌گیریم.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}\sin(n\pi x). \qquad (۴)$$

نمودار این تابع و مجذور آن درشکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که پیش بینی شد دیگر دوره تناوبِ مجذور این تابع نصف دوره تناوبِ آن نیست.



شکل ۲: نمودار یک تابع دندانه اره‌ای و مجذور آن.

۳-پراش میدان نزدیک از یک ساختار دوره‌ای یک بعدی

وقتی باریکه‌ی نور تخت همدوسی از یک توری صرفاً دامنه‌ای عبور می‌کند، دامنه‌ی میدان نوری بلافاصله بعد از توری یک تابع حقیقی است که آن را با $u_0(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیربسط می‌دهیم:

$$u_0(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}t_m\exp\left(\frac{i\,2\pi mx}{p}\right), \qquad (۵)$$

که در آن که p گام توری و t_m ضرایب بسط فوریه هستند. منظور از توری صرفاً دامنه‌ای آن است که در اثر عبور جبهه موج نوری از این توری، تابعیت فاز آن دچار تغییر نشود و تغییرات صرفاً روی دامنه موج اعمال شود. همچنین می توان نشان داد که در تقریب فرنل دامنه‌ی میدان در فاصله‌ی z از این توری به شکل زیر است

$$u_z(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}t_m\, e^{-i2\pi m^2\left(\frac{z}{z_t}\right)}\exp\left(\frac{i\,2\pi mx}{p}\right) \qquad (۶)$$

که در آن $z_t=\frac{2p^2}{\lambda}$ بعنوان فاصله‌ی تالبوت تعریف می‌شود [۱]. حال به محاسبه‌ی دامنه‌ی مختلط در فاصله‌ی ربع تالبوت $z=\frac{z_t}{4}$ می‌پردازیم. با جاگذاری در رابطه‌ی (۷) خواهیم داشت:

$$u_{z=\frac{z_t}{4}}(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}t_m(-i)^{m^2}\exp\left(\frac{i\,2\pi mx}{p}\right). \qquad (۷)$$

می توان نشان داد که حاصل $(-i)^{m^2}$ به ازای m زوج برابر ۱ و به ازای m فرد برابر $-i$ می باشد. بنابر این:

$$u_{z=\frac{z_t}{4}}(x)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ even}}^{+\infty}t_m\, e^{\frac{i\,2\pi mx}{p}}-i\sum_{\substack{m=-\infty\\ odd}}^{+\infty}t_m\, e^{\frac{i\,2\pi mx}{p}}. \qquad (۸)$$

با تعریف دو تابع حقیقی $u_r(x)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ even}}^{+\infty}t_m\, e^{\frac{i2\pi mx}{p}}$ و $u_i(x)=\sum_{\substack{m=-\infty\\ odd}}^{+\infty}t_m\, e^{\frac{i2\pi mx}{p}}$ رابطه ی (۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u_{z=\frac{z_t}{4}}(x)=u_r(x)-i\,u_i(x). \qquad (۹)$$

از آنجایی که $u_r(x)$ تنها شامل جملات با شمارنده‌ی زوج است، مطابق بحث انجام شده در بخش قبل، دوره تناوب آن برابر $\frac{p}{2}$ است. همچنین $u_r(x)$ تنها شامل جملات با شمارنده ی فرد است. بنابراین اگر حداقل اختلاف شمارنده-های آن نیز برابر ۲ باشد، مجذور آن دارای دوره تناوب $\frac{p}{2}$ خواهد بود. حال به بررسی طرح شدت در فاصله‌ی ربع-تالبوت که بصورت زیر است می‌پردازیم:

$$I_{z=\frac{z_t}{4}}(x)=u_r(x)^2+u_i(x)^2. \qquad (۱۰)$$

مطابق بحث فوق، $I_{z=\frac{z_t}{4}}(x)$ می‌تواند یک طرح دوره‌ای با گام $\frac{p}{2}$ باشد. بدین ترتیب سازوکار تولید هماهنگ دوم فضایی در فاصله‌ی ربع-تالبوت روشن می‌شود. همچنین فاز متناظر میدان نوری از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_{z=\frac{z_t}{4}}(x)=\tan^{-1}\left[\frac{u_i(x)}{u_r(x)}\right]. \qquad (۱۱)$$

از آنجایی که دوره تناوب $u_r(x)$ برابر p و دوره

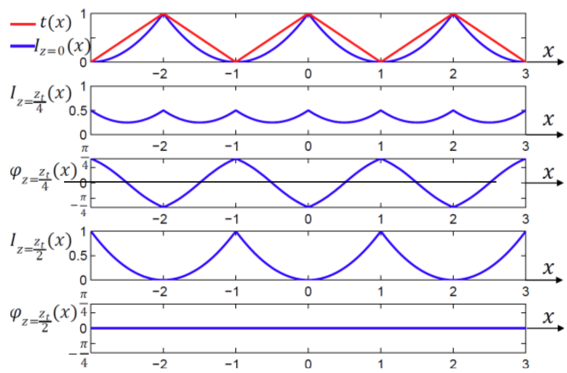
تناوب $u_i(x)$ برابر $\frac{p}{2}$ است، دوره تناوب طرح فازی $\varphi_{z=\frac{z_t}{4}}(x)$ برابر p یعنی برابرگام توری دامنه‌ای اولیه خواهد بود. برای روشن شدن نتایج بحث فوق در اینجا پراش میدان نزدیک از دو توری دامنه‌ای را بررسی می‌کنیم. ابتدا یک توری صرفاً دامنه‌ای با تابع عبور مثلثی را در نظر می‌گیریم. دامنه میدان نور یکنواخت پس از عبور از چنین توری‌ای به صورت زیر داده می‌شود:

$$u_0(x)=t(x)=1+\sum_{\substack{n=1\\ odd}}^{+\infty}\frac{8}{(\pi n)^2}\cos(n\pi x), \qquad (۱۲)$$

که در آن $t(x)$ تابع عبور توری را نشان می‌دهد. دامنه‌ی مختلط میدان در فاصله‌ی z از توری به شکل زیر خواهد بود

$$u_z(x)=1+\sum_{\substack{n=1\\ odd}}^{+\infty}e^{-i2\pi n^2(\frac{z}{z_t})}\frac{8}{(\pi n)^2}\cos(n\pi x). \qquad (۱۳)$$

شکل (۳) نمایه‌ی تابع عبور توری $t(x)$ و نمایه‌ی شدت بلافاصله بعد از توری $I_{z=0}(x)$ و همچنین نمایه‌ی شدت و فاز طرح پراش مربوطه در فواصل ربع-تالبوت و نیم-تالبوت از ساختار را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل ۳ می‌بینیم در فاصله‌ی ربع-تالبوت گام طرح شدت نصف شده ولی گام طرح فاز برابر توری است، در حالیکه در فاصله‌ی نیم-تالبوت، طرح شدت اولیه با یک جابجایی برابر با نصف گام کاملاً بازتولید شده است.



شکل ۳: نمایه‌ی تابع عبور یک ساختار دوره‌ای صرفاً دامنه‌ای مثلثی و نمایه‌ی شدت بلافاصله بعد از توری(ردیف اول) و همچنین نمایه‌ی شدت و فاز طرح پراش مربوطه در فواصل ربع-تالبوت ونیم-تالبوت از آن ساختار

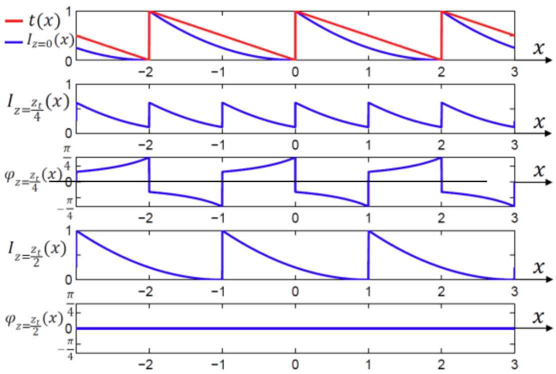
حال توری صرفاً دامنه‌ای با تابع عبور دندانه اره‌ای را در نظر می‌گیریم. دامنه میدان نوری پس از عبور از توری به صورت داده می‌شود:

$$u_0(x)=t(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}\sin(n\pi x). \qquad (۱۴)$$

دامنه‌ی مختلط میدان نوری در فاصله‌ی z از این توری به شکل زیرخواهد بود

$$u_z(x)=t(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2e^{-i2\pi n^2(\frac{z}{z_t})}}{\pi n}\sin(n\pi x). \qquad (۱۵)$$

در شکل ۴ نمایه‌ی تابع عبور این توری $t(x)$ و نمایه‌ی شدت بلافاصله بعد از آن $I_{z=0}(x)$ و همچنین نمایه‌ی شدت و فاز طرح پراش مربوطه در فواصل ربع-تالبوت و نیم-تالبوت از ساختار توری را نشان می‌دهد. در اینجا دامنه تغییرات شدت یا نمایانی طرح پراش در فاصله‌ی ربع-تالبوت نسبت به شکل ۳ بیشتر است.



شکل ۴ نمودارهای متناظر با شکل ۳ برای یک ساختار دوره‌ای صرفاً دامنه‌ای دندانه‌اره‌ای.

۴-نتیجه‌گیری

تولید هماهنگ دوم فضایی در پراش میدان نزدیک از توری‌-های صرفاً دامنه‌ای در فواصل ربع-تالبوت آنها فرمول‌بندی شد و در مورد دو نوع توری بکار برده شد.

مراجع

داود حبری، سیف الهرسولی، علی محمد خزایی، "بررسی تشکیل خود تصویر برای ساختارهای دوره‌ای دو بعدی قائم تحت تابش نور تخت بر اساس تحلیل طیف فضایی آنها"، مقاله‌نامه کنفرانس فیزیک ایران، ۳۴-۳۷، ۱۳۹۵.