



## تابش گرمایی مبادله شده در ساختارهای کروی هم مرکز

سحر بیاتی<sup>۱</sup>، احسان عموقربان<sup>۱،۲</sup> و علی مهدی فر<sup>۱،۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم، گروه فیزیک

<sup>۲</sup>دانشگاه شهرکرد، گروه پژوهشی فوتونیک

چکیده- در این مقاله تابش گرمایی مبادله شده را در یک سامانه‌ی غیر تعادلی ولی ایستا بررسی می‌کنیم. سامانه مزبور متشکل از یک کره دی‌الکتریک پوشش داده شده است که دمای کره، پوشش و محیط خلاء اطراف، متفاوت در نظر گرفته می‌شوند. بدین منظور از روابط بدست آمده از کوانتس کانونی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در حضور محیط‌های مادی و همچنین توابع هم‌بستگی بین مولفه‌های آن‌ها استفاده می‌کنیم. سپس با بکاربردن تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه مزبور، مولفه شعاعی بردار پویین تینگ را محاسبه کرده و در نهایت به محاسبه عددی تابش گرمایی تبدالی بین این اجسام می‌پردازیم.

کلیدواژه- تابش گرمایی، تانسور گرین الکترومغناطیسی، امواج منتشرشونده و ناپایا

## Radiative heat transfer in the concentric spherical structures

Sahar Bayati<sup>1</sup>, Ehsan Amooghoban<sup>1,2</sup> and Ali Mahdifar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University

<sup>2</sup>Photonics Research Group, Shahrekord University

Abstract-In this paper, we study the transferred thermal radiation in a non-equilibrium but stationary system. Aforementioned system composed of a coated dielectric sphere that is assumed the spherical, shell and vacuum have different temperatures. For this purpose, we use the obtained relations from the canonical quantization of electromagnetic fields in the presence of medium for electric and magnetic fields and as well as the correlation function of their components. Then, by using the Green tensor of the aforementioned system, we compute the radial component of Poynting vector. Finally, the numerical calculation of exchange thermal radiation among these objects is calculated.

Keyword- Radiative heat, Electromagnetic Green tensor, Propagating and evanescent waves

## ۱. مقدمه

در دهه اخیر تبادل تابش گرمایی بین ساختارهای مادی که در فواصل جدایی ناچیزی از یکدیگر قرار گرفته و در تماس فیزیکی با یکدیگر نیستند، به خاطر کاربردهای گسترده‌ای که در حوزه نانو تکنولوژی و فیزیک دارند، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. توان گرمایی تبدالی بین اجسامی که در فواصل جدایی بزرگ از یکدیگر هستند از قانون استفان-بولتزمن  $P = A\sigma(T_1^4 - T_2^4)$  تبعیت می‌کند. اما این قانون در فواصل بسیار کوچکتر از طول موج گرمایی به دلیل تونل‌زنی فوتون‌ها دیگر معتبر نیست. زیرا در مقیاس‌های بزرگ تنها امواج پیش‌رونده در تبادل انرژی نقش دارند، اما در فواصل جدایی کم امواج ناپایا نقش بسیار مهمی را ایفا کرده و باعث افزایش چشم‌گیر انرژی تبدالی بین اجسام خواهند شد. از این‌رو، یک توصیف کاملاً کوانتومی از این سامانه‌ها یک امر ضروری به شمار می‌آید که در آن میدان الکترومغناطیسی به صورت جریانی از فوتون‌ها در نظر گرفته می‌شود.

در سال ۱۹۶۹ نخستین مشاهده‌ی تجربی از تابش غیر عادی بین اجسام در فواصل میکرومتر گزارش شد [۱] و در سال ۱۹۷۱ پولدر و وان هوو بر اساس نظریه الکترودینامیک افت‌وخیزی ازایه شده توسط رایتوف [۲]، رهیافتی کلی برای محاسبه تابش تبدالی بین اجسام ماکروسکوپی معرفی کردند. تاکنون بر اساس این رهیافت ماکروسکوپی مطالعات فراوانی روی ساختارها و هندسه‌های مختلف صورت گرفته که به عنوان نمونه می‌توان به سامانه‌های شامل دو صفحه‌ی نیمه نامتناهی [۳]، دو جسم کروی که مراکز آن‌ها در فاصله جدایی مشخصی از یکدیگر قرار گرفته‌اند [۴-۵] و یک جسم کروی یا بیضوی شکل در مقابل یک صفحه [۶] اشاره کرد. در این مقاله با بکاربردن رهیافت کانونی در کوانتس میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط‌های جاذب، به محاسبه تابش گرمایی منتقل شده از یک کره دی‌الکتریک با دمای  $T_3$  که پوششی کروی شکل با دمای متفاوت  $T_2$  روی آن نشانده شده به خلاء در دمای  $T_1$  می‌پردازیم. هندسه‌ی کروی بررسی شده در این‌جا کاملاً متفاوت از ساختارهای کروی شکل بررسی شده در مراجع [۴-۵] هستند.

## ۲. روابط پایه

بردار پویین تینگ یک کمیت دینامیکی مناسب برای محاسبه شار گرمایی تابشی مبادله شده بین سامانه‌های ماکروسکوپی و هم‌چنین میکروسکوپی است. از این‌رو در این مقاله از این کمیت برای محاسبه تابش گرمایی جذب شده توسط پوسته کروی شکلی که روی یک کره دی‌الکتریک نشانده شده و در شرایط ایستا و غیر تعادلی بسر می‌برد می‌پردازیم (شکل ۱). بردار پویین تینگ برای بسامدهای مثبت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle S_i(r,t) \rangle = 2\text{Re} \left\langle E_j(r,t) H_k^*(r,t) - E_k(r,t) H_j^*(r,t) \right\rangle, \quad (1)$$

که براکت‌ها اشاره به میانگین‌گیری آنسامبلی دارند و  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  و  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هستند که در فضای بسامد برحسب تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\mu_0 \omega \int d\mathbf{r}' \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^N(\mathbf{r}', \omega), \quad (2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int d\mathbf{r}' \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^N(\mathbf{r}', \omega).$$

در این‌جا  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{Ee}$  تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه است که در معادله

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = i\mu_0 \omega \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

می‌کند. با توجه به این که میدان مغناطیسی مطابق معادلات ماکسول بصورت  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E} / i\mu_0 \omega$  بر حسب میدان الکتریکی نوشته می‌شود، بنابراین تانسور گرین مغناطیسی به صورت  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_{He}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \nabla \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}_{Ee}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  برحسب تانسور گرین سامانه نوشته می‌شود. هم‌چنین در رابطه (۲)  $\mathbf{j}^N(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{P}^N(\mathbf{r}, \omega)$  بیانگر جریان قطبش نوفه است که از ماهیت اتلافی محیط‌های مادی ناشی می‌شود. در مرجع [۷] تابع هم‌بستگی بین مولفه‌های قطبش نوفه بدست آمده و نشان داده شده است که نتایج آن در تطابق کامل با قضیه‌ی افت‌وخیز-اتلاف است. این تابع هم‌بستگی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\langle \mathbf{P}_i^N(\mathbf{r}, \omega), \mathbf{P}_j^{N\dagger}(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 4\pi \hbar \epsilon_0 \text{Im} \bar{\bar{\chi}}_{e,ij}(\mathbf{r}, \omega) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{ij} a_T, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{es}^{23}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{ik_3}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_{mn} \{ \mathbf{M}_{\sigma_{mn}}^{(1)}(k_2) A_M^{23} \mathbf{M}'_{\sigma_{mn}}(k_3) \\ & + \mathbf{N}_{\sigma_{mn}}^{(1)}(k_2) A_N^{23} \mathbf{N}'_{\sigma_{mn}}(k_3) + \mathbf{M}_{\sigma_{mn}}(k_2) C_M^{23} \mathbf{M}'_{\sigma_{mn}}(k_3) \\ & + \mathbf{N}_{\sigma_{mn}}(k_2) C_N^{23} \mathbf{N}'_{\sigma_{mn}}(k_3) \}, \end{aligned} \quad (Y)$$

که در آن علامت پرایم نشان دهنده مختصات چشمه و عبارت‌های بدون پرایم بیانگر نقطه میدان،  $\mathbf{M}_{\sigma_{mn}}$ ،  $\mathbf{N}_{\sigma_{mn}}$  و  $D_{mn} = (2 - \delta_m^0) \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$  ویژه توابع برداری کروی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\sigma_{mn}}(k) = & \mp \frac{m}{\sin \theta} z_n^{(\ell)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} m \varphi \hat{\theta} \\ & - z_n(kr) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{dr} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} m \varphi \hat{\phi}, \quad (A) \\ \mathbf{N}_{\sigma_{mn}}(k) = & \frac{n(n+1)}{kr} z_n^{(\ell)}(kr) P_n^m(\cos \theta) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} m \varphi \hat{r} \\ & + \frac{1}{kr} \frac{d[rz_n^{(\ell)}(kr)]}{dr} \left[ \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{dr} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} m \varphi \hat{\theta} \right. \\ & \left. \mp \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} m \varphi \hat{\phi} \right]. \end{aligned}$$

در این جا تابع  $z_n^{(\ell)}$  به ازای  $\ell = 0$  برابر تابع بسل کروی  $j_n(x)$  و به ازای  $\ell = 1$  برابر تابع هنکل کروی  $h_n^{(1)}(x)$  است و  $A_{M(N)}^{13}$ ،  $A_{M(N)}^{23}$ ،  $C_{M(N)}^{23}$  ضرایب بسط تانسور گرین هستند که با اعمال شرایط مرزی در  $r = a$ ،  $r = b$  به صورت زیر بر حسب ضرایب بازتاب و عبور تعمیم یافته نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{M(N)}^{13} = & \frac{T_{F1}^{H,V} T_{F2}^{H,V} T_{P1}^{H,V}}{T_{P1}^{H,V} + T_{F1}^{H,V} R_{F2}^{H,V} R_{P2}^{H,V}}, \quad (9) \\ A_{M(N)}^{23} = & \frac{A_{M(N)}^{13}}{T_{F1}^{H,V}}, \quad C_{M(N)}^{23} = \frac{R_{P1}^{H,V} A_{M(N)}^{13}}{T_{P1}^{H,V}}. \end{aligned}$$

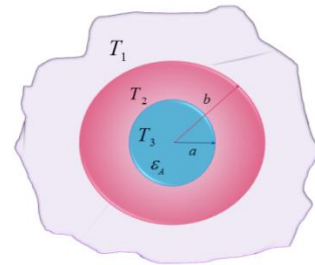
به دلیل طولانی بودن و پیچیده بودن ضرایب عبور و بازتاب از بیان جزئیات آن‌ها در این جا خودداری می‌کنیم و خواننده را برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۸] ارجاع می‌دهیم. بعد از انجام محاسبات بسیار طولانی، بردار پویین تینگ در فضای بسامد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle S_{3 \rightarrow 1}(\mathbf{r}, \omega) \rangle_r = & \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_{mn}^2 \operatorname{Re} \{ tr [\chi_{\theta, \varphi}^N \xi_n^{(1)}(k_1 \mathbf{r}) \xi_n^{(1)*}(k_1 \mathbf{r})] \\ & + \chi_{\theta, \varphi}^M z_n^{(1)}(k_1 \mathbf{r}) \xi_n^{(1)*}(k_1 \mathbf{r}) \}, \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن  $a_T = [2(n_T + \frac{1}{2})]$  است. اکنون با استفاده از روابط (۲) و (۳)، رابطه هم‌بستگی بین مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\langle E_i(r, \omega) H_j^\dagger(r, \omega) \rangle = 4\pi \hbar \frac{i\omega^3}{c^2} a_{T_A} \int d\mathbf{r}'' \bar{\mathbf{G}}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) \bar{\mathbf{G}}_{jk}^{H*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) \varepsilon_A^n. \quad (4)$$

حال سامانه‌ای متشکل از پوسته‌ای کروی را در نظر می‌گیریم که روی یک کره دی‌الکتریک نشانده شده و در شرایط ایستا و غیر تعادلی بسر می‌برد (شکل ۱).



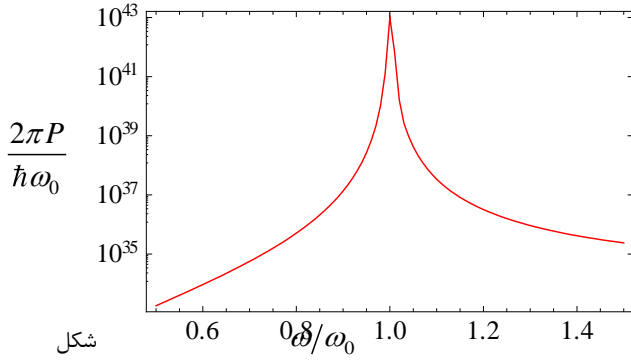
شکل ۱: نمایی از دو کره هم‌مرکز با دمای  $T_2$ ،  $T_3$  در محیط خلاء با دمای  $T_1$ .

لایه‌ها به ترتیب در دماهای متفاوت  $T_2$  و  $T_3$  هستند و در محیط خلا با دمای  $T_1$  قرار گرفته‌اند. بدون کاستن از کلیت مساله، دمای محیط ۲ را صفر در نظر می‌گیریم. با توجه به این که هدف اصلی ما در این مقاله محاسبه تابش مبادله شده از محیط ۳ به محیط ۱ است، بنابراین به محاسبه شار گرمایی تابشی زیر می‌پردازیم:

$$P_{ab} = \langle S(\mathbf{r}, \omega) \rangle_{3 \rightarrow 2} - \langle S(\mathbf{r}, \omega) \rangle_{3 \rightarrow 1}, \quad (5)$$

همان‌طور که از رابطه بالا و هم چنین از روابط (۱) و (۴) مشخص است برای محاسبه بردار پویین تینگ در جمله نخست به تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه نیاز داریم که نقاط چشمه و میدان آن‌ها به ترتیب در ناحیه ۳ و ۲ و در جمله دوم در ناحیه‌های ۳ و ۱ قرار گرفته باشند. با استفاده از روش ارائه شده در مرجع [۸]، تانسور گرین سامانه در این ناحیه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_{es}^{13}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & \frac{ik_3}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_{mn} \{ \mathbf{M}_{\sigma_{mn}}^{(1)}(k_1) A_M^{13} \mathbf{M}'_{\sigma_{mn}}(k_3) \\ & + \mathbf{N}_{\sigma_{mn}}^{(1)}(k_1) A_N^{13} \mathbf{N}'_{\sigma_{mn}}(k_3) \}, \end{aligned} \quad (6)$$



شکل

۲: طیف تابش گسیلی از کره پوشش داده شده به ازای پارامترهای  
 $\omega_{p,1}/\omega_0 = 0.2$  ،  $b = 6\mu\text{m}$  ،  $a = 5\mu\text{m}$   
 $\gamma_2/\omega_0 = 0.001$  و  $\gamma_1/\omega_0 = 0.01$  ،  $\omega_{p,2}/\omega_0 = 0.1$

### ۳. نتیجه گیری

در این مقاله بر اساس یک رهیافت کاملا کوانتومی و میکروسکوپی تابش گرمایی ساطع شده در ساختارهای کروی هم مرکز غیرتعدالی محاسبه شد. در شکل ۲ مشاهده شد که زمانی که شعاع کره و پوشش از مرتبه طول موج گرمایی سامانه در دمای ۳۰۰ کلوین است، دامنه طیف تابش گسیلی در نزدیکی بسامد تشدید به دلیل غالب شدن سهم امواج ناپایا نسبت به امواج منتشر شونده به شدت افزایش می‌یابد. به علاوه اگرچه در این جا نشان داده نشده است ولی پوشش توانایی افزایش و حتی کاهش تابش گرمایی گسیلی از کره را خواهد داشت.

### مراجع

- [1] C. M. Hargreaves, "Anomalous radiative transfer between closely-spaced bodies", Phys. Lett. A 30, 491 (1969).
- [2] D. Polder and M. V. Hove, "Theory of Radiative Heat Transfer between Closely Spaced Bodies", Phys. Rev. B 4, 3303 (1971).
- [3] K. Joulain, J. P. Mulet, F. Marquier, R. Carminati and J. J. Greffet, "Surface electromagnetic waves thermally excited: Radiative heat transfer, coherence properties and Casimir forces revisited in the near field", Surf. Sci. Rep. 57,59 (2005)
- [4] A. Narayanaswamy and G. Chen, "Thermal near-field radiative transfer between two spheres", Phys. Rev. B 77, 075125 (2008).
- [5] Y. Zheng, and A. Ghanekar, "Radiative energy and momentum transfer for various spherical shapes: A single sphere, a bubble, a spherical shell, and a coated sphere", J. Appl. Phys. 117, 064314 (2015)
- [6] O. Huth, F. R. uting, S. A. Biehs, and M. Holthaus, "Shape-dependence of near-field heat transfer between a spheroidal nanoparticle and a flat surface", Phys. J. Appl. Phys 50, 1603 (2010).
- [7] س. بیاتی، ا. عموقربان، ع. مهدی‌فر، "تبادل تابش گرمایی کوانتومی بین محیط مغناطودی الکتریک و محیط پیرامون در وضعیت غیرتعدالی" مقاله‌نامه کنفرانس فیزیک ایران، ۷۳۳-۷۳۵ (۱۳۹۵)

- [8] L. Le-Wei, K. Pang-Shyan and L. Mook-Seng and Y. Tat-Soonv, "Electromagnetic dyadic Green's function in spherically multilayered media", IEEE Trans. Microw. Theory Tech.42, 2302 (1994)

$$\begin{aligned} \langle S_{3 \rightarrow 2}(\mathbf{r}, \omega) \rangle_r &= \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n D_{mn}^2 \text{Re} \{ \text{tr} \left[ \frac{1}{|T_{F1}^V|} \chi_{\theta, \varphi}^N \zeta_n^{(1)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(1)*}(k_2 \mathbf{r}) \right. \right. \\ &+ \frac{1}{|T_{F1}^H|} \chi_{\theta, \varphi}^M z_n^{(1)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(1)*}(k_2 \mathbf{r}) + \left. \left. \frac{R_{P1}^V}{|T_{P1}^V|} \chi_{\theta, \varphi}^N \zeta_n^{(0)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(0)*}(k_2 \mathbf{r}) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{R_{P1}^H}{|T_{P1}^H|} \chi_{\theta, \varphi}^M z_n^{(0)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(0)*}(k_2 \mathbf{r}) + \frac{R_{F1}^V}{T_{F1}^V T_{P1}^V} \chi_{\theta, \varphi}^N \zeta_n^{(1)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(0)*}(k_2 \mathbf{r}) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{R_{F1}^H}{T_{F1}^H T_{P1}^H} \chi_{\theta, \varphi}^M z_n^{(1)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(0)*}(k_2 \mathbf{r}) + \frac{R_{P1}^V}{T_{F1}^V T_{P1}^V} \chi_{\theta, \varphi}^N \zeta_n^{(0)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(1)*}(k_2 \mathbf{r}) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{R_{P1}^H}{T_{F1}^H T_{P1}^H} \chi_{\theta, \varphi}^M z_n^{(0)}(k_2 \mathbf{r}) \zeta_n^{(1)*}(k_2 \mathbf{r}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن  $\varphi = \hbar \omega^3 a_{r_A} \varepsilon_A^n |k_3|^2 / 2\pi c^2$   
 $\zeta_n^{(\ell)}(k_f \mathbf{r}) = -k_f^2 z_n^{(\ell)}(k_f \mathbf{r})$  و  $\zeta_n^{(\ell)}(k_f \mathbf{r}) = d[\text{tr} z_n^{(\ell)}(k_f \mathbf{r})] / dr$   
 و پارامترهای  $\chi_{\theta, \varphi}^{N(M)}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\chi_{\theta, \varphi}^N = \frac{|A_N^{13}|^2 \Upsilon_N}{|k_f|^2} \left[ \left( \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 (1 + \sin 2m\varphi) \right. \\ \left. + \left( \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 (1 - \sin 2m\varphi) \right], \quad (12)$$

$$\chi_{\theta, \varphi}^M = |A_M^{13}|^2 \Upsilon_M \left[ \left( \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right)^2 (1 + \sin 2m\varphi) \right. \\ \left. + m^2 \left( \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right)^2 (1 - \sin 2m\varphi) \right]. \quad (13)$$

در این جا  $\Upsilon_{N(M)}$  نیز به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\Upsilon_N = \frac{(n+m)!}{|k_3|^2 (n-m)!} \left\{ \frac{2(n(n+1))^2}{(2n+1)} I_1 + \left( \frac{1}{m} + \frac{n^2 - m^2 + n}{2n+1} \right) I_2 \right\}, \quad (14)$$

$$\Upsilon_M = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left( m + \frac{n^2 - m^2 + n}{2n+1} \right) I_3. \quad (15)$$

اکنون با الگوسازی تابع گذرگی الکتریکی پوشش و کره

$$\varepsilon_j = \left( 1 + \frac{\omega_{p,j}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \right)$$

که در آن  $\omega_{p,j}$  و  $\gamma_j$  به ازای  $j = 1, 2$  به ترتیب بیانگر بسامد پلاسما و ضریب جذب پوشش و کره هستند، نتایج عددی رابطه (۵) در شکل ۲ آورده شده است.