



## تأثیر پهنای باند فیلتر چیدمان آشکارسازی بر میزان درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌های حاصل از فرایند پایین-تبدیل پارامتری خودبخودی

علی محمدی، آتوسا سادات عربانیان، علی دلفی رضایی و رضا مسعودی

دانشگاه شهید بهشتی - پژوهشکده لیزر و پلاسما

چکیده - در این مقاله وابستگی درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌های حاصل از فرایند پایین-تبدیل پارامتری خودبخودی (SPDC) به پهنای باند فیلترهای طیفی مورد استفاده در چیدمان آشکارسازی زوج فوتون‌ها، مورد بررسی قرار گرفته است. SPDC یک فرایند آمیخته سازی سه موجی است که در محیط بلور غیر خطی انجام می‌گیرد و در طی آن زوج فوتون‌های درهمتنیده به منظور استفاده در زمینه‌های مختلف نظیر محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ارتباطات کوانتومی، تولید می‌شود. اندازه درهمتنیدگی سیستم کوانتومی (زوج فوتون‌ها) به کمک مقدار آنتروپی درهمتنیدگی که معیاری از بی‌نظمی موجود در سیستم است تعیین می‌شود. ابتدا معادله ویژه مقدراری عملگر چگالی کاهش یافته‌ی فوتون‌های سیگنال و ایدلر، بر حسب کمیت پهنای باند عبوری فیلترهای طیفی چیدمان آشکارسازی، استخراج شده، سپس با حل عددی معادله ویژه مقدراری، ضرایب اشمیت به ازای مقادیر مختلف پهنای باند عبوری فیلترهای طیفی مورد استفاده در چیدمان آشکارسازی محاسبه شده و در نهایت با محاسبه‌ی عملگر آنتروپی، نحوه‌ی وابستگی درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌ها به این کمیت گزارش می‌شود.

کلیدواژه- تبدیل-پائین پارامتری خودبخودی، درهمتنیدگی، زوج فوتون درهمتنیده، تک فوتون.

## Effect of the filter bandwidths of the detection setup on the spectral entanglement of photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion (SPDC)

Ali Mohammadi, Atoosa Sadat Arabanian, Ali Dalafi Rezaie, Reza Massudi

Shahid Beheshti University-Laser and Plasma Research Institute

Abstract- In this paper, the dependence of the spectral entanglement of photon pairs generated by spontaneous parametric down-conversion process on the bandwidth of the spectral filters used in the detection setup of photon pairs has been studied. SPDC process is a three-wave mixing that is carried out in a nonlinear crystal and the entangled photon pairs generated by this process are used in various fields such as quantum computing, quantum cryptography and quantum communication. The amount of entanglement of the quantum system (photon pairs) is determined by the entanglement entropy, which provides a measure for disorder in the system. At first eigenvalue equations of the reduced density operator of signal and idler photons according to the parameter of filter bandwidth of the detection setup has been obtained, Then by solving the eigenvalue equations numerically, different values of the Schmidt coefficients is calculated in terms of different values of the spectral bandwidth. Finally the dependence of the spectral entanglement of photon pairs is reported by the entanglement entropy calculations.

Keywords: Spontaneous Parametric Down-Conversion, Entanglement, Entangled Photon Pairs, Single Photon.

## ۱- مقدمه

یکی از مفاهیم جالب و شگفت انگیز در دنیای کوانتومی مفهوم درهمتنیدگی است. با تولد اپتیک کوانتومی امکان تولید عملی حالت های درهمتنیده و انجام آزمایش بر روی آنها به وسیله فوتون ها بوجود آمد. فوتون های درهمتنیده در عمل از روش های مختلف، نظیر تابش آبخاری اتم ها و فرایند پائین-تبدیل پارامتری خودبخودی (SPDC) تولید می شوند [۱]. فرایند SPDC زمانی اتفاق می افتد که یک بلور غیر خطی توسط لیزر دمش می شود و در طی برهمکنش لیزر با بلور، تعدادی از فوتون های دمش، تبدیل به دو فوتون سیگنال و ایدلر می-شوند. در سال ۱۹۷۰، SPDC برای اولین بار به عنوان یک منبع تولید زوج فوتون معرفی گردید [۲]. از آن زمان تاکنون آزمایش های بسیاری برای بررسی تولید زوج فوتون های درهمتنیده با استفاده از فرایند SPDC و خواص مختلف آنها به منظور کاربرد در زمینه هایی نظیر ارتباطات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی، محاسبات کوانتومی و آزمایش های مربوط به نامساوی بل صورت گرفته است. امروزه SPDC به عنوان متداول ترین روش تولید زوج فوتون های درهمتنیده شناخته شده است [۳]. از سوی دیگر وجود درهمتنیدگی طیفی بین زوج فوتون های حاصل از SPDC در برخی از آزمایش های تجربی به عنوان یک عامل مخرب محسوب می-شود. از این رو دانشمندان همواره به دنبال راه حلی تجربی برای حذف این درهمتنیدگی های ناخواسته هستند [۴]. در این مقاله تاثیر استفاده از فیلترهای طیفی در چیدمان آشکارسازی فوتون های سیگنال و ایدلر، بر کاهش درهمتنیدگی طیفی این زوج فوتون ها بررسی می شود.

## ۲- تئوری

در فرایند SPDC که به عنوان یک فرایند غیر خطی مرتبه دوم شناخته می شود در اثر برهمکنش لیزر دمش با بلور، تعدادی از فوتون های دمش، به دو فوتون درهمتنیده سیگنال و ایدلر تبدیل می شوند. بسامد فوتون های تولید شده از بسامد فوتون های دمش کمتر هستند. بازده فرایند SPDC به شدت دمش فرودی، نوع بلور و میزان برقراری شرایط تطبیق فازی بستگی دارد. روابط بقای انرژی و تطبیق فازی برای فرایند پارامتری مرتبه دوم SPDC به ترتیب به صورت رابطه های

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \quad (1)$$

$$\hbar\vec{k}_p = \hbar\vec{k}_s + \hbar\vec{k}_i \quad (2)$$

می باشند [۵]. زوج فوتون های حاصل از فرایند SPDC به وسیله حالت خالص  $|\psi\rangle\langle\psi| = \rho$  توصیف می شوند که در آن بردار حالت  $|\psi\rangle$  به صورت رابطه

$$|\psi\rangle = \int d\Omega_s d\Omega_i \Phi(\Omega_s, \Omega_i) \hat{a}^\dagger(\Omega_s) \hat{a}^\dagger(\Omega_i) |0,0\rangle \quad (3)$$

می باشد [۶]. اگر  $\omega_n$  با  $n = s, i$  نشان دهنده بسامد فوتون های سیگنال و ایدلر باشد،  $\Omega_n = \omega_n - \omega_n^0$  انحراف از بسامد مرکزی  $\omega_n^0$  را نشان می دهد.  $\hat{a}^\dagger(\Omega_n)$  نشان دهنده عملگر خلق تک فوتونهای سیگنال و ایدلر می باشد. در اینجا فوتون های حاصل از فرایند SPDC به صورت بسته موج هایی با پهنای طیفی مشخص در نظر گرفته می شود. تمام اطلاعات مربوط به توزیع طیفی زوج فوتون ها به وسیله تابع مد بهنجار زوج فوتون سیگنال و ایدلر  $\Phi(\Omega_s, \Omega_i)$  توصیف می-شود. با در نظر گرفتن بلور BBO به طول L و لیزر دمش پالسی با توزیع طیفی گاوسی با پهنای طیفی  $\sigma_p$ ، شکل تابع مد زوج فوتون ها به صورت

$$\Phi(\Omega_s, \Omega_i) = N \exp\left[-\frac{(\Omega_s + \Omega_i)^2}{4\sigma_p^2}\right] \text{sinc}\left[\frac{\Delta k L}{2}\right] \times \exp\left[-i\frac{\Delta k L}{2}\right] \exp\left[-\frac{\Omega_s^2}{4\sigma_s^2} - \frac{\Omega_i^2}{4\sigma_i^2}\right] \quad (4)$$

می باشد [۶]. در رابطه ی بالا N ضریب بهنجارش بوده و تابع نمایی اول، توزیع طیفی لیزر دمش را به صورت یک پوش گاوسی مشخص می کند. خصوصیات بلور از طریق کمیت عدم تطبیق فازی  $\Delta k = k_p - k_s - k_i$  وارد مساله می شود که با تقریب به صورت جمله ی اول بسط تیلور آن  $k_p = (N_p - N_s)\Omega_s + (N_p - N_i)\Omega_i$  در نظر گرفته می-شود. در اینجا  $N_p$ ،  $N_s$  و  $N_i$  به ترتیب نشان دهنده معکوس سرعت گروه پرتوهای دمش، سیگنال و ایدلر می باشند. و در نهایت جمله نمایی آخر رابطه (۴) نشان دهنده فیلترهای طیفی مورد استفاده در چیدمان آشکارسازی فوتون های سیگنال و ایدلر می باشد که به صورت توابع گاوسی با پهنای باندهای  $\sigma_s$  و  $\sigma_i$  مدل سازی شده اند. طرح واره ای از چیدمان تولید و آشکارسازی زوج فوتون های درهمتنیده حاصل از فرایند SPDC، در شکل (۱) نشان داده شده است.

برای سیستم‌های دو جزئی با حالت خالص-مانند زوج فوتون‌های حاصل از فرایند SPDC- اثبات شده است که میزان جدایی پذیر بودن حالت، با استفاده از ضرایب اشمیت و محاسبه آنتروپی درهمتنیدگی  $S$  برای عملگر چگالی کاهش یافته‌ی یکی از زیر سیستم‌ها (فوتون‌های سیگنال و ایدلر)، به صورت رابطه

$$E(\rho) \equiv s(\rho_s) = \sum_m \lambda_m \ln(\lambda_m) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

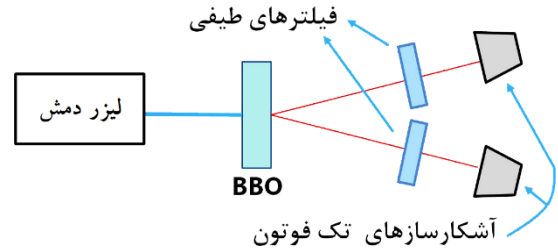
قابل محاسبه می‌باشد [۷]. اندازه آنتروپی درهمتنیدگی  $E(\rho)$  که میزان جدایی ناپذیر بودن  $\rho$  را مشخص می‌کند، همواره عددی بین صفر (کاملاً غیر درهمتنیده) تا ۱ (بیشینه درهمتنیدگی) می‌باشد. ضرایب اشمیت  $\lambda_m$  که ویژه مقادیر حقیقی مشترک عملگرهای کاهش یافته‌ی فوتون‌های سیگنال و ایدلر در پایه‌های اشمیت می‌باشند، از حل عددی معادله ویژه مقادیری انتگرالی

$$\int d\Omega_s K(\Omega_s, \Omega_s) \Phi_m(\Omega_s) = \lambda_m \Phi_m(\Omega_s) \quad (11)$$

بدست می‌آیند [۴]. تابع کرنل  $K(\Omega_s, \Omega_s)$  در معادله انتگرالی (۱۱) همان تابع مد تک فوتون‌های سیگنال (۶) است و تابع  $\Phi_m(\Omega_s)$  ویژه تابع  $\rho_s$  می‌باشد. با محاسبه‌ی ضرایب اشمیت به ازای پهنای باند طیفی مختلف فیلترها و بدست آوردن آنتروپی درهمتنیدگی از رابطه‌ی (۱۰)، وابستگی اندازه‌ی درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌ها به این متغیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

#### ۴- نتایج محاسبات

فرض کنید دمش پالسی با طول موج ۸۰۰ nm و پهنای باند طیفی ۱۲ nm وارد بلور BBO به طول ۲/۱ mm و تطبیق فازی نوع ۲ برای فرایند SPDC تهیه‌شده (تپه‌گن nm)  $= 2\lambda_p, \lambda_i = 1600\lambda_s$  می‌شود. با محاسبه‌ی ضرایب اشمیت به ازای مقادیر مختلف پهنای فیلتر طیفی، در سه چیدمان آشکارسازی مختلف (فیلترسازی هر دو پرتو سیگنال و ایدلر، فیلترسازی پرتو سیگنال و فیلترسازی پرتو ایدلر) و محاسبه‌ی اندازه آنتروپی درهمتنیدگی از رابطه‌ی (۱۱)، وابستگی آنتروپی درهمتنیدگی به پهنای باند عبوری فیلترها را به صورت شکل (۲) بدست آورده‌ایم.



شکل ۱: طرح‌واره چیدمان تولید و آشکارسازی زوج فوتون‌های درهمتنیده‌ی حاصل از فرایند SPDC

عملگر چگالی کاهش یافته‌ی توصیف کننده‌ی حالت فوتون-های سیگنال (ایدلر)، با گرفتن رَد از عملگر چگالی زوج فوتون-ها  $[Tr[\rho]]$  نسبت به پایه‌های زیر فضای فوتونهای ایدلر (سیگنال)، به صورت

$$\rho_s = Tr[|\psi\rangle\langle\psi|]_i \quad (5)$$

$$= \int d\Omega_s d\Omega_i \Phi(\Omega_s, \Omega_s) \hat{a}^\dagger(\Omega_s) |0\rangle\langle 0| \hat{a}^\dagger(\Omega_s)$$

بدست می‌آید که در آن

$$\Phi(\Omega_s, \Omega_s) = \int d\Omega_i \Phi(\Omega_s, \Omega_i) \Phi(\Omega_s, \Omega_i) \quad (6)$$

تابع مد تک فوتون‌های سیگنال می‌باشد [۶].

درهمتنیدگی طیفی فوتون‌های سیگنال و ایدلر به معنی وجود همبستگی بین یک تک مد بسامدی فوتون سیگنال (ایدلر) با چندین مد بسامدی ایدلر (سیگنال) می‌باشد [۵]. برای نشان دادن این مطلب از تابع شدت طیفی توأم (Joint Spectral Intensity) JSI که به صورت مجذور حاصل ضرب جملات تطبیق فازی و پوش لیزر دمش در رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شود، استفاده می‌گردد [۴].

$$JSI = \left| \exp\left[-\frac{(\Omega_s + \Omega_i)}{4\sigma_p^2}\right] \text{sinc}\left[\frac{\Delta k L}{2}\right] \exp\left[-i\frac{\Delta k L}{2}\right] \right|^2 \quad (7)$$

این تابع عبارتست از احتمال اینکه فوتون سیگنال دارای بسامد  $\omega_s$  و در عین حال، فوتون ایدلر دارای بسامد  $\omega_i$  باشد.

#### ۳- مدل محاسباتی

یکی از معیارهای سنجش میزان درهمتنیدگی حالت توصیف کننده یک سیستم کوانتومی مرکب (چند جزئی)، بررسی جدایی پذیر بودن حالت زیرسیستم‌های تشکیل دهنده سیستم کوانتومی کل می‌باشد [۷].

$$(8) \quad \rho = \rho_s \otimes \rho_i \quad (\text{غیر درهمتنیده})$$

$$(9) \quad \rho \neq \rho_s \otimes \rho_i \quad (\text{درهمتنیده})$$

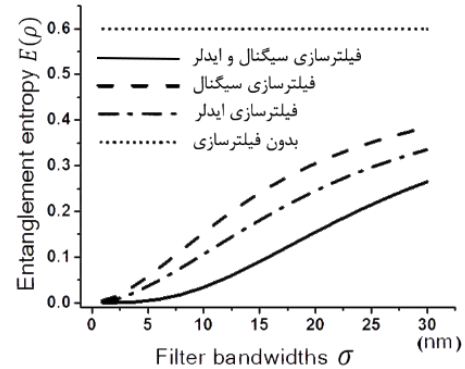
در شکل (۳) با در نظر گرفتن هر مد بسامدی سیگنال (ایدلر) و رسم کردن یک خط به موازات محور ایدلر (سیگنال)، گستره‌ی طیفی فوتون‌های ایدلر (سیگنال) همبسته با مد طیفی مورد نظر و احتمال همبستگی بین مدها مشخص می‌شود. عمل فیلترسازی با حذف تعدادی از فوتون‌هایی که دارای بسامد دورتری از بسامد مرکزی می‌باشند، باعث می‌شود هر مد بسامدی فوتون‌های سیگنال (ایدلر) با مدهای بسامدی کمتری از فوتون‌های ایدلر (سیگنال) همبسته باشد. در واقع فیلترسازی طیفی فوتون‌های سیگنال و ایدلر، باعث ایجاد نظم در سیستم و افزایش اطلاعات طیفی و در نتیجه کاهش درهمتنیدگی می‌شود.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله چگونگی وابستگی اندازه درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌های حاصل از فرایند SPDC، به فیلترهای طیفی مورد استفاده در چیدمان اندازه‌گیری آنها بررسی شد. محاسبات نشان داد که میزان درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌ها با باریکتر شدن پهنای باند عبوری فیلترها کاهش می‌یابد. بنابراین با استفاده از اطلاعات حاصل از شبیه‌سازی نتیجه می‌شود که در دسته‌ای از کاربردهای عملی زوج فوتون‌های درهمتنیده که برای آنها درهمتنیدگی طیفی به عنوان عامل مخرب محسوب می‌شود، می‌توان با فیلترسازی مناسب میزان درهمتنیدگی طیفی را کاهش داد.

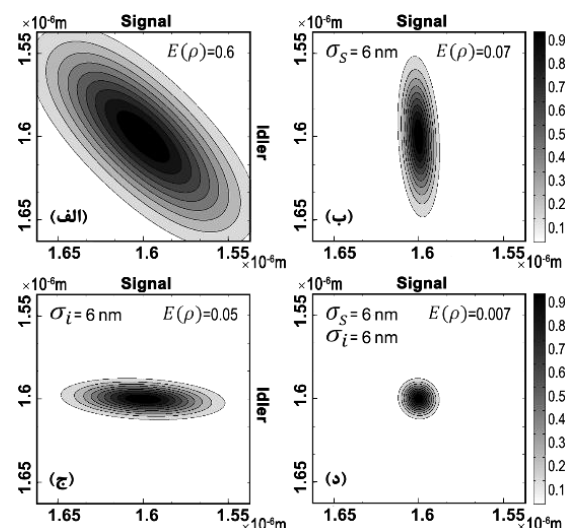
### مراجع

- [1] Takeuchi, Shigeki. "Recent progress in single-photon and entangled-photon generation and applications." Japanese Journal of Applied Physics 53.3 (2014): 030101.
- [2] Burnham, David C., and Donald L. Weinberg. "Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs." Physical Review Letters 25.2 (1970): 84.
- [3] Yin, Juan, et al. "Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels." Nature 488.7410 (2012): 185-188.
- [4] Grice, W.P., A. B. U'ren, and I. A. Walmsley. "Eliminating frequency and space-time correlations in multiphoton states." Physical Review A 64.6 (2001): 063815.
- [5] Chekhova, Maria. "Polarization and Spectral Properties of Biphotons." Progress in optics 56 (2011): 187.
- [6] Osorio, C. I., N. Sangouard, and Robert Thomas Thew. "On the purity and indistinguishability of down-converted photons." Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics 46.5 (2013): 055501.
- [7] J. Audretsch, *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics*, p. 143, John Wiley & Sons, 2008.



شکل ۲: آنتروپی درهمتنیدگی زوج فوتون‌های سیگنال و ایدلر حاصل از فرایند SPDC، محاسبه شده به ازای مقادیر مختلف پهنای باند فیلترهای طیفی در سه چیدمان مختلف فیلترسازی

در شکل (۱) مشاهده می‌شود عمل فیلترسازی (مستقل از نوع چیدمان مورد استفاده) به خودی خود باعث کاهش درهمتنیدگی طیفی می‌شود. باریک‌تر شدن پهنای باند فیلتر-های مورد استفاده، باعث کاهش بیشتر درهمتنیدگی طیفی زوج فوتون‌ها می‌شود. تابع شدت طیفی توأم (JSI) زوج فوتون‌های حاصل از SPDC و اثر عمل فیلترسازی (به ازای سه چیدمان فیلترسازی) بر این تابع در شکل‌های (۳-الف) تا (۳-د) نشان داده شده است.



شکل ۳: تابع شدت طیفی توأم زوج فوتون‌های سیگنال و ایدلر حاصل از فرایند SPDC تهیه‌شده به ازای طول موج مرکزی دم‌ش ۸۰۰ nm و پهنای باند طیفی ۱۲ nm. (الف) بدون فیلترسازی، (ب) فیلترسازی سیگنال، (ج) فیلترسازی ایدلر، (د) فیلترسازی سیگنال و ایدلر