



## بررسی نیروی کازیمیر-پولدر در حضور یک پوشش متاماده‌ی ناپدیدکننده کروی

فربیا شفیعیان<sup>۱</sup>، احسان عموقربان<sup>۱</sup> و علی مهدی‌فر<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه شهرکرد، دانشکده علوم، گروه فیزیک

<sup>۲</sup>دانشگاه شهرکرد، گروه پژوهشی فوتونیک

چکیده - در این مقاله بر اساس رهیافت کانونی ارایه شده در کوانتس میدان‌های الکترومغناطیس، نیروی کازیمیر-پولدر بین یک اتم چند ترازوی و محیط‌های مادی جاذب را برحسب تانسور گرین سامانه بدست می‌آوریم. رابطه مزبور را برای محاسبه نیروی کازیمیر-پولدر یک اتم دو ترازوی به کار می‌بریم که پوشش متاماده‌ی ناپدیدکننده کروی در مجاورتش باشد. سپس با انجام محاسبات عددی نشان داده می‌شود که عملکرد پوشش‌های ناپدیدکننده در کاهش اندازه نیرو نسبت به محیط‌های اتلافی مشابه بسیار چشم‌گیر است.

کلیدواژه- پوشش متاماده‌ی ناپدیدکننده، تانسور گرین الکترومغناطیسی، نیروی کازیمیر-پولدر.

## Investigation of the Casimir-Polder Forces in Presence of Spherical Meta-material Invisibility Cloaking

Fariba Shafiyani<sup>1</sup>, Ehsan Amooghorban<sup>1, 2</sup> and Ali Mahdifar<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Shahrekord University

<sup>2</sup>Photonics Research Group, Shahrekord University

Abstract - In this paper, on the base of canonical approach in quantization of the electromagnetic fields, we obtain the Casimir-Polder force between a several levels atom and absorbing media in terms of the electromagnetic Green tensor. We use the aforementioned relation for calculation of the Casimir-Polder force for a two level atom which is placed in the vicinity of the spherical meta-material invisibility cloaking. Then, by numerical calculations, it is shown that the operation of the invisibility cloak in the reduction of force is more noticeable compared with the similar absorbing media.

Keyword: Meta-material invisibility cloaking, Green tensor, Casimir-Polder force

اجسام غیرقطبیده‌ی دیگر برهم‌کنش نمی‌کنند. بنابراین برهم‌کنش تنها زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از اجسام قطبیده باشد و یا در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی قرار بگیرند. در حالی‌که در الکترودینامیک کوانتومی، حتی زمانی‌که جسم در حالت پایه و میدان الکترومغناطیسی در حالت خلاء است، طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ برهم‌کنش بین اجسام

### ۱- مقدمه

نیروهای پاشندگی نیروهایی هستند که از ماهیت کوانتومی میدان الکترومغناطیسی، یعنی نوسانات خلاء کوانتومی و برهم‌کنش آن با اجسام ناشی می‌شوند. بر اساس الکترودینامیک کلاسیک، اجسام غیرقطبیده حتی اگر قطبش‌پذیر هم باشند با

همیلتونی سامانه‌ی به صورت  $\hat{H} = \hat{H}_{at} + \hat{H}_F + \hat{H}_{int}$  بیان می‌شود که در آن همیلتونی سامانه اتمی عبارت است از:

$$\hat{H}_{at} = \sum_k E_k \hat{A}_{kk} = \sum_k E_k |k\rangle\langle k|, \quad (1)$$

که در آن  $E_k$  و  $|k\rangle$  به ترتیب ویژه مقادیر انرژی و ویژه حالت‌های همیلتونی اتم مزبور هستند. همیلتونی میدان الکترومغناطیسی و ماده‌ی مغناطودی‌الکتریک نیز بر حسب عملگرهای بوزونی  $\hat{f}_\lambda$  به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H}_F = \sum_{\lambda=e,m} \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty d\omega \hbar \omega \hat{f}_\lambda^\dagger(\mathbf{r}, \omega) \cdot \hat{f}_\lambda(\mathbf{r}, \omega), \quad (2)$$

که  $\hat{f}_m$  و  $\hat{f}_e$  عملگرهای بوزونی هستند که به برانگیختگی‌های الکتریکی و مغناطیسی ماده و میدان اشاره دارند. همیلتونی برهم‌کنش نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A) = -\sum_{kl} \mathbf{d}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A) \hat{A}_{kl}. \quad (3)$$

عملگر میدان الکتریکی بر حسب تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda=e,m} \int d^3\mathbf{r}' \int_0^\infty d\omega \bar{\bar{\mathbf{G}}}_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \hat{f}_\lambda(\mathbf{r}', \omega) + H \cdot C, \quad (4)$$

که در آن  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  و  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = i\mu_0 \omega \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2}} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \bar{\bar{\mathbf{g}}}_e(\mathbf{r}', \omega), \quad (5)$$

$$(\mathcal{F}) \bar{\bar{\mathbf{G}}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = i\mu_0 \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2}} [\nabla' \times \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)]^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{g}}}_m(\mathbf{r}', \omega),$$

که در آن  $\bar{\bar{\mathbf{G}}}$  تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه است که در معادله هلمهولتز صدق می‌کند و  $\bar{\bar{\mathbf{g}}}_e$  تانسور جفت‌شدگی الکتریکی است که مطابق با مرجع [۴] به صورت  $\bar{\bar{\mathbf{g}}}'_e \cdot \bar{\bar{\mathbf{g}}}_e(\mathbf{r}, \omega) = 2\varepsilon_0 \omega \text{Im}[\bar{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, \omega)] / \pi$  الکتریکی مرتبط است. به طور مشابه، رابطه‌ای برای تانسور جفت‌شدگی مغناطیسی  $\bar{\bar{\mathbf{g}}}_m$  بدست می‌آید که در آن وارون

رخ داده و در نتیجه نیروهای پاشندگی به وجود می‌آیند. از جمله نیروهای پاشندگی می‌توان به نیروی کازیمیر-پولدر اشاره کرد که عبارت است از نیروی برهم‌کنشی بین اجسام ماکروسکوپی و یک ذره‌ی میکروسکوپی خنثی و غیرقطبیده. از طرف دیگر پیشرفت‌های نوینی که در سال‌های اخیر در شیوه‌های ساخت نانو مواد و ساختارهای کوچک صورت گرفته است، امکان ساخت مواد مصنوعی-ماتمواد-را ایجاد کرده است. ماتمواد ویژگی‌های خود را بیشتر از ساختار واحدهای اجزا تشکیل دهنده‌ی خود دریافت می‌کنند. از جمله مهمترین کاربردهای ماتمواد می‌توان به پوشش‌های ناپدیدکننده اشاره کرد. پوشش‌های ناپدیدکننده‌ای که در این مقاله بررسی می‌شوند، ماتموادی با ضریب شکست مثبت هستند که با منحرف نمودن پرتوهای نور فرودی پیرامون خود باعث می‌شوند تا شی‌ای که در هسته مرکزی این پوشش‌ها واقع شده است از دید ناظر بیرونی پنهان باقی بماند. این پوشش‌ها برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ توسط جان پندری [۱] و لئونهارد [۲] به صورت نظری بررسی شدند و اولین نمونه‌ی تجربی آن‌ها توسط گروه اسمیت در ناحیه‌ی طیفی ماکروویو ساخته شد [۳]. اخیراً گروه ما [۴]، اثرات اپتیک کوانتومی این پوشش‌ها بر گسیل خودبه‌خودی و همچنین درهم‌تنیدگی اتم‌های دوترازی برانگیخته‌ای که در مجاورت آن‌ها واقع شده‌اند را بررسی کرده است. در آن‌جا نشان داده شده که گسیل خودبه‌خودی به شدت نسبت به ویژگی‌های پاشندگی و اتلافی پوشش ناپدیدکننده حساس است، به طوری که در نزدیکی بسامد تشدید، پوشش نه تنها ویژگی ناپدیدکنندگی را از خود نشان نمی‌دهد، بلکه آن را نمایان‌تر نیز می‌کند. ولی در نواحی دور از بسامد تشدید و همچنین نواحی دور از مرکز پوشش، پوشش عملکرد بسیار خوبی از خود نشان می‌دهد. در این مقاله نشان داده خواهد شد که عملکرد پوشش‌های ناپدید کننده در کاهش میزان نیروی کازیمیر-پولدر نسبت به محیط‌های اتلافی مشابه بسیار چشم‌گیر است.

## ۲- نیروی کازیمیر-پولدر یک اتم ساکن

مطابق با مرجع [۴] لاگرانژی سامانه را متشکل از ذره‌ای با جرم  $m$  و بار  $e$  در نظر می‌گیریم که با میدان الکترومغناطیسی و ماده‌ی مغناطودی‌الکتریک برهم‌کنش می‌کند. با تعریف تکانه‌های همیوگ متناظر با متغیرهای دینامیکی سامانه

آهنگ واپاشی و جابه‌جایی لمب اتم مزبور به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آیند [۴]:

$$\Gamma_n = \sum_k \frac{2\mu_0}{\hbar} \Theta(\tilde{\omega}_{nk}) \tilde{\omega}_{nk}^2 \mathbf{d}_{nk} \cdot \text{Im} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \tilde{\omega}_{nk}) \cdot \mathbf{d}_{kn}, \quad (13)$$

$$\delta\omega_n = \sum_k \frac{\mu_0}{\pi\hbar} P \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2 \mathbf{d}_{nk} \cdot \text{Im} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{kn}}{\tilde{\omega}_{nk} - \omega}, \quad (14)$$

که در آن  $P$  بیانگر مقدار اصلی کوشی است و  $\tilde{\omega}_{mn}$  به صورت  $\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} + \delta\omega_m - \delta\omega_n$  تعریف می‌شود. اکنون با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۷) و محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی آن در حالت خلاء میدان و استفاده از عبارت تقریبی  $\langle \hat{A}_{nk}(t) \hat{A}_{ln}(\tau) \rangle = \delta_{ln} e^{i\Omega_{nk}(t-\tau)} \sigma_{mn}(\tau)$  بدست آمده که در آن  $\Omega_{nk}$  به صورت  $\Omega_{nk} = \tilde{\omega}_{nk} + i(\Gamma_n + \Gamma_k)/2$  تعریف می‌شود، نیروی کازیمیر-پولدر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(t) = \sum_n p_n(t) F_n, \quad (15)$$

که  $p_n(t) = \langle \hat{A}_{mn}(t) \rangle$  است. در ادامه با استفاده از حساب مانده‌ها و به‌کار بردن انتگرال پربندی روی یک پربند در ربع اول صفحه آرگاند مربوط به بسامد، نیروی کازیمیر-پولدر به صورت حاصل جمع دو بخش تشدیدی و غیرتشدید  $F_n^{res}$  و  $F_n^{nres}$  نوشته می‌شود. در حد تقریب مرتبه‌ی اولی که  $\Omega_{nk}$  به سمت  $\omega_{nk}$  میل می‌کند، این بخش‌ها به صورت ساده شده زیر بیان می‌شوند:

$$F_n^{res}(\mathbf{r}_A) = 2\mu_0 \sum_{k < n} \omega_{nk}^2 \nabla [\mathbf{d}_{nk} \cdot \text{Re} \bar{\mathbf{G}}^S(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega_{nk}) \cdot \mathbf{d}_{kn}] \Theta(\omega_{nk}), \quad (16)$$

$$(17) F_n^{nres}(\mathbf{r}_A) = \frac{2\mu_0}{\pi} \sum_{k < n} \nabla \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \omega_{nk}^2} \omega_{nk} [\mathbf{d}_{nk} \cdot \bar{\mathbf{G}}^S(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, i\zeta) \cdot \mathbf{d}_{kn}].$$

در این جا  $\bar{\mathbf{G}}^S$  پاسخ همگن معادله هلمولتز است که بیانگر پراکندگی میدان الکترومغناطیسی از مرزهای محیط مادی است.

### ۳- تانسور گرین

در این بخش یک اتم دو تراز با بسامد گذار  $\omega_A$  را در نظر می‌گیریم که در مکان  $\mathbf{r}_A$  از یک پوشش ناپدید کننده کروی پندری قرار دارد و در حالت پایه است. مطابق با مرجع [۱] تانسور

تانسور تراوایی مغناطیسی جایگزین تانسور گذردهی الکتریکی شده است.

نیروی لورنتس مربوط به اتم ساکن در تقریب دو قطبی الکتریکی به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{F} = \nabla [\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] = \nabla \sum_{kl} [\mathbf{d}_{kl} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \hat{A}_{kl}], \quad (7)$$

اکنون با استفاده از هامیلتونی کل سامانه تحول زمانی عملگرهای میدانی و اتمی سامانه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\hat{f}}_\lambda(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \hat{f}_\lambda(\mathbf{r}, \omega) + \frac{i}{\hbar} \sum_{kl} \bar{\mathbf{G}}_\lambda^{*T}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{d}_{kl} \hat{A}_{kl}, \quad (8)$$

$$(9) \dot{\hat{A}}_{mn} = i\omega_{mn} \hat{A}_{mn} + \frac{i}{\hbar} \sum_k (\mathbf{d}_{nk} \hat{A}_{mk} - \mathbf{d}_{km} \hat{A}_{kn}) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_A),$$

که در آن  $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$  است. با حل معادله (۸) و جایگذاری پاسخ آن در رابطه (۴)، داریم:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega, t) = \hat{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}, \omega, t) + \hat{\mathbf{E}}_S(\mathbf{r}, \omega, t), \quad (10)$$

که جمله اول سهم مربوط به میدان الکتریکی خلاء و جمله دوم سهم مربوط به میدان الکتریکی چشمه است که به صورت زیر بر حسب پارامترهای سامانه تعریف می‌شوند:

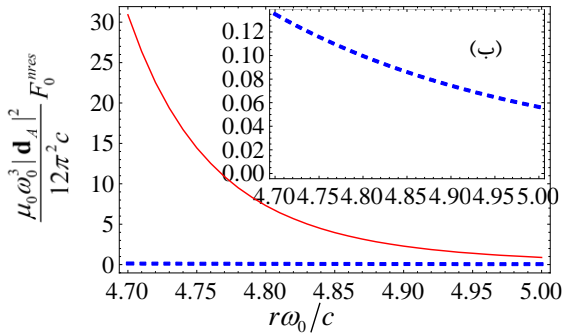
$$\hat{\mathbf{E}}_F(\mathbf{r}, \omega, t) = e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega, 0), \quad (11)$$

$$(12) \hat{\mathbf{E}}_S(\mathbf{r}, \omega, t) = \frac{i\mu_0 \omega^2}{\pi} \int_0^t d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \sum_{k,l} \text{Im} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_A, \omega) \cdot \mathbf{d}_{kl} \hat{A}_{kl}(\tau).$$

با توجه به این که نیروی کازیمیر-پولدر در دردمای صفر مطلق ناشی از اثرات خلاء کوانتومی هستند، بنابراین فرض می‌کنیم که میدان الکترومغناطیسی در لحظه اولیه‌ی  $t=0$  در حالت خلاء است. از این رو، مقدار چشم‌داشتی میدان الکترومغناطیسی ناشی از سهم چشمه صفر خواهد شد. اکنون با در نظر گرفتن این نکته، رابطه (۱۲) را در رابطه (۹) جایگذاری می‌کنیم. با فرض این که برهم‌کنش بین ماده و میدان ضعیف است، به گونه‌ایی که رژیم جفت شدگی ضعیف صادق باشد، بنابراین با بکار بردن تقریب مارکوف،

$$\int_0^t d\tau e^{-i\omega(t-\tau)} \langle \hat{A}_{ij}(t) \hat{A}_{kl}(\tau) \rangle \approx \langle \hat{A}_{il}(t) \rangle \delta_{jk} \zeta(\omega - \tilde{\omega}_{jk})$$

تابع زتا  $\zeta(x) = \pi\delta(x) - iP(1/x)$  تقریب می‌زنیم. در نهایت



شکل ۱: بخش غیر تشدیدی نیرو در حضور پوشش (منحنی توپر) و در عدم حضور پوشش (منحنی خط چین) بر حسب فاصله‌ی بدون بعد  $r\omega_0/c$  برای وضعیتی که (الف)  $\omega_A = \omega_0$  و (ب)  $\omega_A = 0.1\omega_0$  است. در این جا  $b\omega_0/c = 4.5$  و  $a\omega_0/c = 3$ ،  $\gamma/\omega_0 = 0.01$ ،  $\omega_p/\omega_0 = 0.1$  است.

### نتیجه‌گیری

از مقایسه شکل ۱ (الف) با شکل ۱ (ب) در می‌یابیم که سهم بخش غیر تشدیدی نیرو با افزایش فاصله‌ی اتم از پوشش سریعاً کاهش یافته است. همچنین مشاهده می‌کنیم که در نواحی دور از بسامد تشدید که اثرات اتلافی پوشش ناچیز است اندازه نیرو به شدت افزایش می‌یابد. به علاوه از مقایسه منحنی‌های توپر و نقطه چین که متناظر با حضور و عدم حضور پوشش هستند، مشاهده می‌شود که پوشش اندازه نیرو را افزایش داده است. اکنون سوالی که مطرح می‌شود این است که اثر ویژگی منحصر به فرد این پوشش‌ها بر نیروی مزبور چگونه است؟ البته اگرچه در این‌جا نشان داده نشده است ولی زمانی که نیروی مزبور را در حضور شیء تنه‌ای بزرگتری که شعاع آن برابر شعاع بیرونی پوشش است محاسبه کنیم، خواهیم دید که اندازه نیرو بسیار بیشتر از زمانی است که پوشش و شیء هر دو حضور دارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که افزایش نیرو در حضور پوشش نسبت به عدم حضورش ناشی از فاصله کمتر اتم تا سطح محیط مادی است، ولی باید در نظر داشته باشیم که پوشش اندازه نیرو را نسبت به زمانی که شیء با همان ابعاد پوشش در کنار اتم قرار گیرد به شدت کاهش داده است.

### مراجع

- [1] Pendry J. B., Schurig D., and Smith D. R., *Controlling Electromagnetic Fields*, **Science** 312, 1780 (2006).
- [2] Leonhardt U., *Optical Conformal mapping*, **Science** 312, 177 (2006).
- [3] Smith D. R., *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies*, **Science** 314, 977 (2006).
- [4] M. Morshed, E. Amooghorban, and A. Mahdifar, *Spontaneous emission and the operation of invisibility cloaks*, **Phys. Rev. A**, 94, 013854 (2016).

گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی پوشش در الگوی لورنتس به صورت زیر است:

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{r}, \omega) = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\right) \left(\frac{b}{b-a}\right) \left[\left(\frac{\mathbf{r}-a}{r}\right)^2 - 1\right] \hat{r}\hat{r} + \bar{\bar{I}}, \quad (18)$$

که در آن  $\bar{\bar{I}} = \hat{r}\hat{r} + \hat{\theta}\hat{\theta} + \hat{\phi}\hat{\phi}$  تانسور واحد،  $\omega_p$  بسامد پلاسما و  $\gamma$  ضریب جذب پوشش،  $a$  شعاع داخلی کره و  $b$  شعاع خارجی آن است. در این‌جا گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی شیء ناپدید شونده به صورت  $\epsilon(\omega) = \mu(\omega) = 1.3 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\right)$  آن‌جا که اتم در حالت پایه در نظر گرفته شده است، به دلیل وجود تابع  $\Theta(\omega_{nk})$ ، بخش تشدیدی نیرو در محاسبات سهمی ندارد. بنابراین نیرو کازیمیر-پولدر (۱۷) برای اتم دو ترازوی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$F_0^{nres}(\mathbf{r}_A) = \frac{2\mu_0}{\pi} \nabla \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \omega_A^2} \omega_A [\mathbf{d}_{01} \cdot \bar{\bar{G}}_s^{11}(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, i\zeta) \cdot \mathbf{d}_{10}]. \quad (19)$$

رابطه بالا در تطابق کامل با روابطی است که بر پایه رهیافت پدیده شناختی در کوانتس میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده بدست آمده‌اند. در این‌جا تانسور گرین سامانه با توجه به تقارن کرولی سامانه و همچنین قرار گرفتن نقاط چشمه و میدان در ناحیه بیرون از پوشش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\bar{G}}_{11}^s(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_A, \omega) = \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{n=1}^\infty 2n+1 \left\{ n(n+1) B_N^{11} \left[ \frac{h_n^1(k_0 r_A)}{k_0 r_A} \right]^2 + B_M^{11} [h_n^1(k_0 r_A)]^2 + B_N^{11} \left[ \frac{1}{k_0 r_A} \frac{d[r_A h_n^1(k_0 r_A)]}{dr_A} \right]^2 \right\}, \quad (20)$$

که در آن ضرایب مجهول  $B_M^{11}$  و  $B_N^{11}$  که از شرایط مرزی مساله به دست می‌آیند با جزییات کامل در مرجع [۴] آورده شده‌اند. اکنون با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه (۱۹) و با توجه به پیچیدگی رابطه بدست آمده، نتایج عددی آن در شکل ۱ رسم شده است.

