



## ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر

فرشید جهان‌بخش، غلامرضا هنرآسا

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

چکیده- در این مقاله ابتدا حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته‌ی فوتون‌افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در یک محیط غیرخطی کر معرفی شده و تابع ویگنر تعداد- فاز حالت‌های معرفی شده مورد بحث قرار گرفته است. سپس ویژگی‌های فازی این حالت‌ها با استفاده از روش پگ-بارنت و همچنین چلانگی تعداد- فاز آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. کلید واژه: حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده، نوسانگر ناهماهنگ، تابع توزیع فاز، چلانگی

### Phase Properties of Photon Added Coherent States for Nonharmonic Oscillators in a Nonlinear Kerr Medium

F. Jahanbakhsh, G. Honarasa

Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

*Abstract- In this paper, the photon added coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium are introduced and the number- phase Wigner function of the introduced states are discussed. Then, the phase properties of these states are investigated by using Pegg-Barnett formalism and also their number-phase squeezing is studied.*

*Keywords: Photon Added Coherent States, Nonharmonic Oscillators, Phase Distribution Function, Squeezing.*

$$|z, m\rangle = (A^\dagger)^m |z\rangle \quad (6)$$

و استفاده از

$$(A^\dagger)^m |n\rangle = \sqrt{\frac{(n+m)!(n+m+\mu)!}{n!(n+\mu)!}} |n+m\rangle \quad (7)$$

برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$|z, m\rangle = N_m(|z|^2) \times \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{(n!(n+\mu)!)^2}} z^n |n+m\rangle \quad (8)$$

که با اضافه کردن  $m$  فوتون به یک نوسانگر ناهماهنگ مرسوم به دست می‌آیند. در رابطه‌ی (۸)  $N_m(|z|^2)$  ثابت بهنجارش است و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N_m(|z|^2) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{(n!(n+\mu)!)^2} |z|^{2n} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

### ۳- ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی معرفی شده

در این بخش به بررسی ویژگی‌های فازی حالت‌های معرفی شده خواهیم پرداخت.

#### ۳-۱- تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز

تابع توزیع ویگنر، آمار کوانتومی تعداد فوتون‌ها و فاز یک میدان تکمد را توصیف می‌کند. منفی شدن این تابع توزیع در فضای فاز می‌تواند طبیعت غیرکلاسیکی حالت‌ها را نمایش دهد. عملگر ویگنر تعداد- فاز به این صورت بیان می‌شود [۳ و ۴]:

$$w_{np}(n, \theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{p=-n}^n e^{2ip\theta} |n+p\rangle \langle n-p| + \sum_{p=-n}^{n-1} e^{i(2p+1)\theta} |n+p\rangle \langle n-p-1| \right\} \quad (10)$$

که در آن  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  و  $\theta$  حقیقی است.

بنابراین برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ داریم:

### ۱- مقدمه

حالت‌های همدوس ابتدا توسط شرودینگر در زمینه‌ی نوسانگرهای هماهنگ معرفی شدند [۱]. حالت‌های همدوس مربوط به نوسانگرهای هماهنگ غیرخطی برای میدان‌های بوزونی ساخته و بررسی شدند که پخش نور لیزر در یک محیط غیرخطی کر با استفاده از جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته را نمایش می‌دهند [۲]. در این مقاله ویژگی‌های فازی حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ را بررسی خواهیم کرد.

### ۲- حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته‌ی فوتون‌افزوده برای نوسانگرهای ناهماهنگ در محیط غیرخطی کر

هامیلتونی مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر است [۲]:

$$H = \omega a^\dagger a + \chi (a^\dagger)^2 a^2 \quad (1)$$

که در آن  $a$  و  $a^\dagger$  عملگرهای نابودی و خلق هستند. در اینجا  $\chi$ ، ثابت جفت‌شدگی است که با پذیرفتاری غیرخطی مرتبه ۳ محیط کر  $\chi^{(3)}$  ارتباط دارد. برای معادله ویژه مقداری هامیلتونی داریم:

$$\hat{H} |n\rangle = E_{n,\mu} |n\rangle \quad n \geq 0 \quad (2)$$

که  $\mu = \frac{\omega - \chi}{\chi}$  و  $E_{n,\mu} = \chi(n^2 + \mu n)$ ، اثر عملگر خلق جبر هایزنبرگ تعمیم‌یافته  $A^\dagger$  به صورت زیر است.

$$A^\dagger |n\rangle = \sqrt{(n+1)^2 + \mu(n+1)} |n+1\rangle \quad (3)$$

حالت‌های همدوس مربوط به نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$|z\rangle = N(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{g(n)}} |n\rangle \quad (4)$$

که در آن  $N(|z|^2)$  ثابت بهنجارش و

$$g(n) = \prod_{i=1}^n (i^2 + \mu i) = \frac{n!(n+\mu)!}{\mu!}, g(0) = 1 \quad (5)$$

است. مشخص است این حالت‌ها وقتی  $\chi \rightarrow 0$  یا  $n! \rightarrow g(n)$ ، تبدیل به حالت همدوس (نوسانگر هماهنگ) می‌شوند. در حالت حدی یا به عبارتی با تعریف حالت‌های فوتون‌افزوده به شکل زیر

متعامدند که به اندازه‌ی ضریبی از  $2\pi/s+1$  با یکدیگر فاصله داشته باشند، از این رو:

$$\theta_p = \theta_0 + \frac{2\pi p}{s+1} \quad p = 0, 1, \dots, s \quad (14)$$

که در آن  $\theta_0$  می‌تواند هر مقدار اختیاری باشد. عملگر فاز هرمیتی را براساس حالت‌های فاز تعریف شده می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\phi_\theta = \sum_{p=0}^s \theta_p |\theta_p\rangle \langle \theta_p| \quad (15)$$

تابع توزیع فاز پگ-بارنت، برای حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگرهای ناهماهنگ به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} \left| \langle \theta_k | z, m \rangle \right|^2 \quad (16)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) و (۱۳) خواهیم داشت:

$$P(\theta) = \frac{N_m(|z|^2)}{2\pi} \times \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{(n!(n+\mu)!)^2}} e^{-i(n+m)\theta_k} z^n \right|^2 \quad (17)$$

درنهایت با جداگانه‌نوشتن جملات مربوط به  $n=l$  و  $n \neq l$  به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

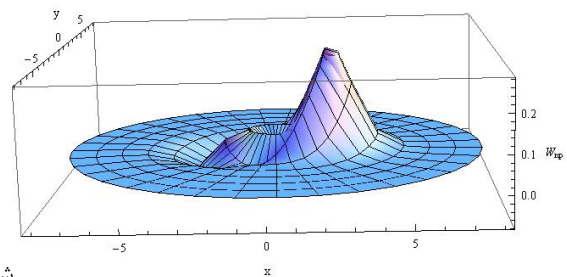
$$P(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2N_m^2(|z|^2) \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sqrt{\frac{\mu!(n+m)!(n+m+\mu)!}{(n!(n+\mu)!)^2}} \times \sqrt{\frac{\mu!(l+m)!(l+m+\mu)!}{(l!(l+\mu)!)^2}} \times z^n z^{*l} \cos[(n-l)\theta] \right\} \quad (18)$$

$$W_{np}(n, \theta) = \langle z, m | w_{np} | z, m \rangle \quad (11)$$

به کمک رابطه‌ی (۸) خواهیم داشت:

$$W_{np} = \frac{N_m^2(|z|^2)}{2\pi} \times \left\{ \left( \sum_{p=-n}^n \sqrt{\frac{\mu!(n-p)!(n-p+\mu)!}{((n-p-m)!(n-p-m+\mu)!)^2}} \times \sqrt{\frac{\mu!(n+p)!(n+p+\mu)!}{((n+p-m)!(n+p-m+\mu)!)^2}} \times e^{2ip\theta} (z^*)^{n+p-m} z^{n-p-m} \right) + \left( \sum_{p=-n}^{n-1} \sqrt{\frac{\mu!(n-p-1)!(n-p+\mu-1)!}{((n-p-m-1)!(n-p-m+\mu-1)!)^2}} \times \sqrt{\frac{\mu!(n+p)!(n+p+\mu)!}{((n+p-m)!(n+p-m+\mu)!)^2}} \times e^{i(2p+1)\theta} (z^*)^{n+p-m} z^{n-p-m-1} \right) \right\} \quad (12)$$

در شکل ۱ تابع توزیع ویگنر به ازای  $\mu=1$  و  $z=1$  بر حسب دو متغیر جدید  $x = n \cos \theta$  و  $y = n \sin \theta$  (مرسوم است تابع ویگنر به جای بر حسب  $n$  و  $\theta$  بر حسب  $x$  و  $y$  رسم شود) رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تابع ویگنر در  $n=3$  منفی شده است که نشان‌دهنده‌ی رفتار غیر کلاسیکی حالت‌های معرفی شده است.



شک

ل ۱: تابع توزیع ویگنر تعداد- فاز حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ به ازای  $m=1$ .

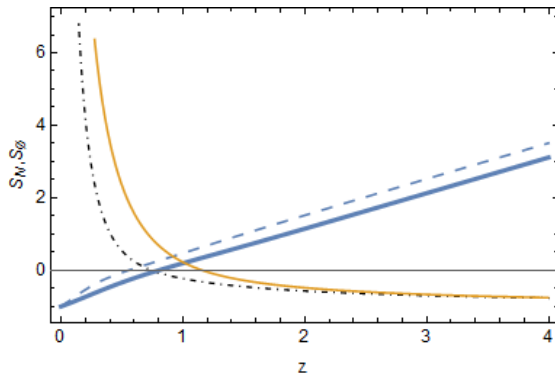
### ۳-۲- تابع توزیع فاز پگ-بارنت

بر اساس رهیافت پگ-بارنت یک مجموعه‌ی کامل از  $s+1$  حالت فاز متعامد  $|\theta_p\rangle$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$|\theta_p\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\theta_p) |n\rangle \quad (13)$$

که در آن  $\{|n\rangle\}_{n=0}^s$  حالت‌های عددی هستند و  $\theta_p$  شامل همه‌ی مقادیر حقیقی است. تنها حالت‌هایی با مقادیر  $\theta$

می‌دهد، به ازای  $0.802 \leq z \leq 1.177$  هیچ چلانگی در عملگرهای تعداد و فاز دیده نمی‌شود. اما برای  $z$  های بیشتر از  $1.177$ ،  $S_\phi$  منفی می‌شود و چلانگی در عملگر فاز دیده می‌شود. درحالی‌که برای  $m=3$  فقط در بازه  $0.556 \leq z \leq 0.744$  چلانگی نداریم. در بقیه نقاط بازه چلانگی در یکی از مولفه‌ها وجود دارد.



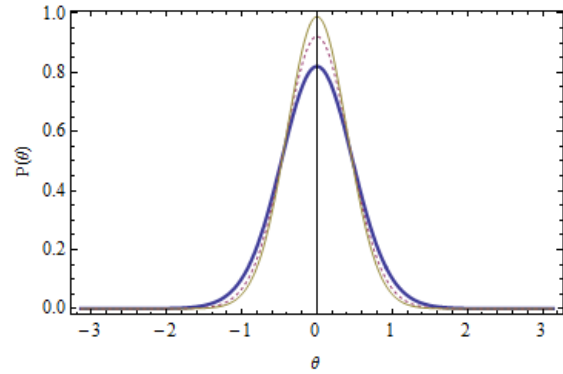
شکل ۳: چلانگی تعداد- فاز حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ برحسب  $z$  به ازای  $m=1$  (خط  $S_N$  خط توپ‌ر ضخیم)،  $S_\phi$  (خط توپ‌ر باریک) و  $m=3$  (خط چین)،  $S_\phi$  (نقطه خط‌چین)

### نتیجه گیری

تابع ویگنر در بعضی نقاط منفی شده که نشان‌دهنده‌ی رفتار غیرکلاسیکی حالت‌های معرفی شده است. همچنین برای تابع توزیع فاز پگ-بارنت هرچه مقدار  $m$  بیشتر باشد قله نمودار بلندتر و تیزتر می‌شود و برای چلانگی تعداد-فاز نیز می‌توان گفت پارامترهای چلانگی دارای رفتار معکوس هستند با افزایش یکی از پارامترها دیگری کاهش می‌یابد به صورتی که صحت رابطه عدم قطعیت محفوظ بماند.

### مراجع

- [1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik," *Naturwissenschaften*, vol. 14, pp. 664-666, 1926.
- [2] M. Al-Rajhi, "Photon added coherent states for nonharmonic oscillators in a nonlinear Kerr medium," *Modern Physics Letters B*, vol. 29, p. 1550035, 2015.
- [3] J. Vaccaro, "Number-phase Wigner function on Fock space," *Physical Review A*, vol. 52, p. 3474, 1995.
- [4] J. A. Vaccaro, "New Wigner function for number and phase," *Optics communications*, vol. 113, pp. 421-426, 1995.
- [5] D. Pegg and S. Barnett, "Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field," *Physical Review A*, vol. 39, p. 1665, 1989.
- [6] B. Roy and P. Roy, "Phase distribution of nonlinear coherent states," *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 1, p. 341, 1999.



شکل ۲: تابع توزیع فاز پگ-بارنت حالت‌های همدوس فوتون‌افزوده‌ی نوسانگر ناهماهنگ برحسب  $\theta$  به ازای  $m=2$  (خط توپ‌ر ضخیم)،  $m=5$  (خط چین) و  $m=8$  (خط توپ‌ر باریک).

تابع توزیع فاز پگ-بارنت حالت‌های معرفی شده به ازای  $\mu=2$  در شکل ۲ رسم شده است، همانطور که مشاهده می‌شود هر چه  $m$  بزرگتر باشد قله‌ی نمودار بلندتر و تیزتر می‌شود که به معنی جایگزیده‌تر شدن حالت‌های معرفی شده نسبت به  $\theta$  است.

### ۳-۳ چلانگی تعداد- فاز

رابطه‌ی عدم قطعیت برای عملگرهای  $N$  و  $\phi_\theta$  به صورت

$$\langle (\Delta\phi_\theta)^2 \rangle \langle (\Delta N)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [N, \phi_\theta] \rangle|^2 \quad (19)$$

است که در آن [۵]:

$$[N, \phi_\theta] = i[1 - 2\pi P(\theta_0)] \quad (20)$$

اگر  $\langle (\Delta\phi_\theta)^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle [N, \phi_\theta] \rangle|$  یا  $\langle (\Delta N)^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle [N, \phi_\theta] \rangle|$  شود. به ترتیب چلانگی در عملگر تعداد یا فاز اتفاق می‌افتد. برای بررسی چلانگی در عملگرهای فاز و تعداد، پارامترهای چلانگی زیر تعریف می‌شوند:

$$S_N = \frac{2\langle (\Delta N)^2 \rangle}{|\langle [N, \phi_\theta] \rangle|} - 1 \quad (21)$$

$$S_\phi = \frac{2\langle (\Delta\phi_\theta)^2 \rangle}{|\langle [N, \phi_\theta] \rangle|} - 1 \quad (22)$$

که در آن داریم:

$$\langle (\Delta\phi_\theta)^2 \rangle = \int \theta^2 P(\theta) d\theta - \left( \int \theta P(\theta) d\theta \right)^2 \quad (23)$$

اگر  $S_N < 0$  ( $S_\phi < 0$ ) باشد چلانگی در عملگر تعداد (فاز) رخ می‌دهد. چلانگی تعداد-فاز این حالت‌ها را به ازای  $\mu=1$  برای دو  $m$  مختلف در شکل ۳ رسم کرده‌ایم که برای  $m=1$  به ازای  $z \leq 0.802$  چلانگی در عملگر تعداد رخ