بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

ترمودینامیک کوانتومی و کاربرد آن در یک سامانه اتم-کاواک

مرتضی رفیعی

شاهرود- دانشگاه صنعتی شاهرود- دانشکده فیزیک

چکیده – در این پژوهش به معرفی ایده ترمودینامیک کوانتومی براساس مفاهیم پایه‌ای مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی پرداخته‌ایم. در ادامه به بررسی چارچوب فرایندهای غیرتعادلی در سامانه‌های کوانتومی پرداخته‌ایم. سپس نتایج به‌دست آمده را بر روی سامانه اتم-کاواک در برهمکنش جینز-کامینگز به‌کار بسته‌ایم. در اینجا نظریه‌ها و محاسبات مبتنی بر سامانه‌های کوانتومی بسته بوده و درنتیجه با در نظر گرفتن یک کاواک خوب از نشت فوتونی و جفت‌شدگی میدان آن با محیط بیرون از آن صرفنظر شده است.

کلید واژه- ترمودینامیک کوانتومی، اتم-کاواک، میانگین کار، آنتروپی بازگشت‌ناپذیر.

Quantum Thermodynamics with application to an atom-cavity system

Morteza Rafiee

Department of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood

Abstract- In this paper we give an introduction to the ideas of quantum thermodynamics, using only basic concepts from quantum and statistical mechanics. Then, we discuss the framework of non-equilibrium processes in quantum systems. We then apply these results to the problem of atom-cavity system while their interaction describe by Jaynes-Cummings model. Here, we introduce the concept of quantum thermodynamics of close quantum system and so by considering a good cavity, coupling of cavity modes with its reservoir has been omitted.

Keywords: Quantum thermodynamics, atom-cavity, average work, irreversible entropy.

۱- مقدمه

در بررسی سامانه‌های ماکروسکوپی به علت وجود تعداد زیاد ذرات، افت و خیزهای نسبی قابل صرفنظر کردن بوده و بنابراین اندازه‌گیری‌های ترمودینامیکی معمولا با مقدار انتظاری کمیت‌های میکروسکوپی در توافق بسیار خوبی است[۱]. امروزه در فرایندهای تعادلی مکانیک آماری تعادلی یکی از نظریه‌های موفق است و نتیجه اصلی آن در رابطه گیبس(Gibbs) برای آنسامبل‌های کانونی است. ولی در فرایندهای غیرتعادلی، پارامترهای ترمودینامیکی، اطلاعات کافی از تحول دینامیکی سامانه را ارائه نمی‌دهند. در این شرایط معادلات نیوتن یا شرودینگر برای تمامی ذرات تشکیل دهنده سامانه (ذرات زیاد) باید مورد مطالعه قرار گیرند که طبیعتا کار دشواری است. بنابراین پژوهشگران به مطالعه سامانه‌های کوچک در فرایندهای غیرتعادلی علاقه‌مند هستند. در این سامانه‌ها به علت تعداد کم ذرات، مطالعه دینامیک آن آسانتر بوده ولی در عین حال افت و خیزها اهمیت زیادی پیدا می‌کنند. وجود این افت و خیزها در سامانه‌های کوچک بر روی کمیت‌هایی از قبیل کار و گرما تاثیر دارد و بررسی جامع آن تحت عنوان نظریه افت و خیزها که تعمیم قانون دوم ترمودینامیک است، شناخته می‌شود. به مرور زمان پژوهشگران به دنبال بررسی این نظریه در سامانه‌های کوانتومی هستند. در این قبیل سامانه‌ها علاوه بر افت و خیزهای دمایی، افت و خیزهای کوانتومی نیز وجود دارند. از میان سامانه‌های کوانتومی به بررسی سامانه اتم-کاواک که از اهمیت زیادی در اپتیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی برخوردار است، می‌پردازیم.

۲- تعریف کار در ترمودینامیک و محاسبه آن در فرایندهای غیرتعادلی

فرایند انجام دادن کار برروی یک سامانه را می‌توان از طریق تغییر پارامتر کنترلی λ در هامیلتونی سامانه توصیف نمود که به آن پارامتر کار نیز گویند و معمولا بین $\lambda_i = \lambda(0)$ و $\lambda_f = \lambda(\tau)$ تغییر می‌کند. آن بخش از انرژی درونی که می‌تواند به کار تبدیل شود انرژی آزاد است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W = \Delta F = \Delta U - Q \qquad (۱)$$

که در آن Q گرمای مبادله شده، ΔU تغییرات انرژی درونی و $\Delta F = F(T,\lambda_f) - F(T,\lambda_i)$ تغییرات انرژی آزاد سامانه است. درفرایندهای سریع که منجر به حالت‌های غیرتعادلی می‌شوند رابطه فوق برقرار نمی‌باشد. برای این فرایندها $W \geq \Delta F$ است که علامت تساوی تنها برای فرایندها ایستاوار برقرار است. میزان اختلاف بین کار انجام شده و تغییرات انرژی آزاد به‌عنوان کار بازگشت‌ناپذیر $W_{irr} = W - \Delta F \geq 0$ نامیده می‌شود[۲]. در یک سامانه بسته کوانتومی تبادل گرما وجود ندارد ($Q = 0$) و تنها کمیت شرکت کننده در تغییر آنتروپی که به آنتروپی بازگشت‌ناپذیر موسوم است ناشی از کار بازگشت‌ناپذیر است و $\Delta S_{irr} = \beta W_{irr}$ [۳]. برای بررسی رفتار ترمودینامیکی یک سامانه کوانتومی، فرض می‌کنیم که هامیلتونی سامانه $H(\lambda(t))$ باشد که $\lambda(t)$ پارامتر کنترلی است که مقدار آن در هر لحظه، مشخص‌کننده حالت تعادلی در آن لحظه است. سامانه در ابتدا در تعادل با یک محیط گرمایی آماده‌سازی شده و بنابراین حالت اولیه آن توسط حالت گیبسی زیر توصیف می‌شود.

$$\rho_G(\lambda) = e^{-\beta H(\lambda)} \big/ Z(\lambda) \qquad (۲)$$

که در آن $Z(\lambda) = Tr(e^{-\beta H(\lambda)})$ تابع پارش است. در لحظه $t=0$ ارتباط سامانه با محیط قطع و بنابر یک پروتکل مقدار λ از λ_i تا λ_f تغییر می‌کند. در زمان $t=0$ سامانه با ویژه‌حالت هامیلتونی اولیه $|l\rangle$، ویژه‌مقادیر ε_l و در زمان $t=\tau$ سامانه با ویژه‌حالت هامیلتونی $|m\rangle$، و ویژه‌مقادیر ε'_m مشخص می‌شود. برای تعریف کار W انجام شده برروی سامانه نیازمند به دو اندازه‌گیری تصویری در لحظه $t=0$ و لحظه $t=\tau$ که سامانه تحت عملگر $U(\tau,0)$ تحول یافته، داریم. احتمال بدست آوردن ε_l در اندازه‌گیری اول و ε'_m در اندازه‌گیری دوم عبارت است از[۴]

$$P_l^0 P_{m|l}^\tau = e^{-\beta\varepsilon_l} |\langle l|U(\tau,0)|m\rangle|^2 \big/ Z(\lambda_i). \qquad (۳)$$

و میانگین کار انجام شده عبارت است از [۵]

$$\langle W\rangle = \sum_{l,m} P_n^0 P_{m|l}^\tau (\varepsilon'_m - \varepsilon_l). \qquad (۴)$$

۳-ترمودینامیک کوانتومی سامانه اتم-کاواک

در ادامه به بررسی یک سامانه متشکل از یک اتم دوترازی واقع شده در یک کاواک می‌پردازیم که دینامیک تحت هامیلتونی جینز-کامینگز وابسته به زمان به‌صورت زیر است($\hbar = 1$)[۶].

$$H_{JC} = \omega_c a^\dagger a + \omega_a(t)\frac{\sigma_z}{2} + g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \qquad (۵)$$

که در آن ω_c (ω_a) بسامد کاواک (اتم)، g بیان‌کننده قدرت برهمکنش بین اتم و کاواک، $a^\dagger$ (a) عملگرهای خلق (فنا) میدان، σ_z ماتریس پائولی و σ_+ (σ_-) عملگرهای بالا (پایین) برنده اسپینی هستند. در اینجا از اتلاف در میدان کاواک (نشت فوتون) صرفنظر شده است. هامیلتونی در زیرفضای $\{|n,e\rangle,|n+1,g\rangle\}$ که در آن e (g) به مفهوم برانگیخته بودن (حالت پایه) اتم و n تعداد فوتون-هاست قطری می‌شود[۷]. در اولین مرحله می‌توان معادله شرودینگر را در تصویر برهمکنش حل نمود. در هر لحظه از زمان حالت سامانه در ترکیب خطی از $\{|n,e\rangle,|n+1,g\rangle\}$ است و بنابراین

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)\,|n,e\rangle + b_{n+1}(t)\,|n+1,g\rangle. \quad (۶)$$

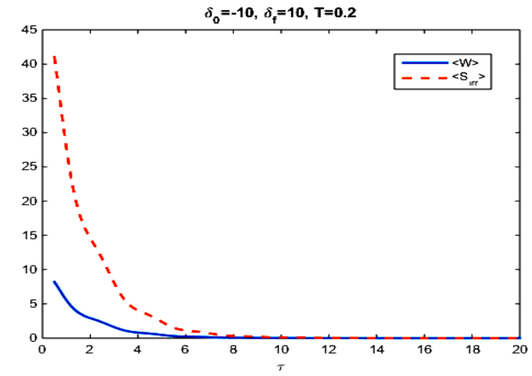
با جایگذاری عبارت فوق در معادله شرودینگر به دو معادله دیفرانسیلی جفت شده زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \dot{a}_n(t) &= -ig\sqrt{n+1}\; e^{i\delta(t)} b_{n+1}(t). \\ \dot{b}_{n+1}(t) &= -ig\sqrt{n+1}\; e^{-i\delta(t)} a_n(t). \end{aligned} \quad (۷)$$

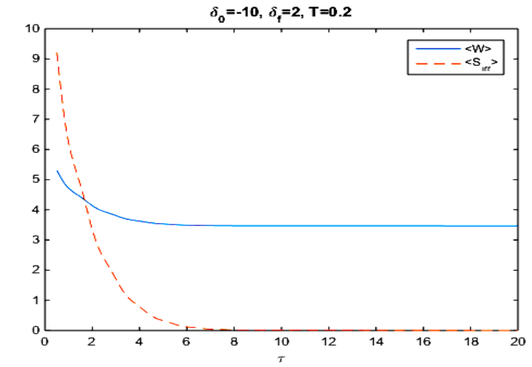
که در آن $\delta(t)=\omega_a(t)-\omega_c$ پارامتر ناکوکی بین اتم و میدان کاواک است. ویژه‌مقادیر انرژی این سیستم در هر لحظه $E_\pm(n)=(n+\frac{1}{2})\omega \pm \sqrt{\delta(t)^2+4g^2(n+1)}$ است. با در نظر گرفتن تغییرات زمانی خطی برای ناکوکی $\delta(t)=\delta_0+\frac{\delta_f-\delta_0}{\tau}t$ که در آن δ_0 (δ_f) میزان ناکوکی اولیه (نهایی) و τ زمان اختیاری نهایی است، هامیلتونی سامانه برحسب زمان تغییر می‌کند. در اینجا زمان نهایی مشخص کننده مدت زمان لازم برای پروتکل تغییرات ناکوکی و درنتیجه تغییرات زمانی هامیلتونی سامانه است. مهمترین مساله در این پروتکل، تغییر و کنترل ناکوکی(ویژه‌مقادیر انرژی) است و با توجه به اعمال و کنترل راحتتر تغییرات خطی ناکوکی در آزمایشگاه، این نوع از تغییرات انتخاب شده است. با توجه به‌اینکه جملات عملگر برهمکنشی $V(t)$ با یکدیگر جابجا نمی‌شوند، امکان حل تحلیلی هامیلتونی وابسته به زمان فوق وجود ندارد. با در نظر گرفتن مقدار بسامد اتمی بسیار بزرگتر از میزان برهمکنش اتم-میدان و ناکوکی، حالتهای دوترازه اتم-کاواک $\{|n,e\rangle,|n+1,g\rangle\}$ به ازای هر n تلاقی نداشته و درنتیجه به ازای هر n حالت دوترازه اتم-کاواک مستقل داریم که از آنها می‌توان به‌عنوان کیوبیت نیز استفاده نمود. محاسبه میانگین کار برای این سامانه مستلزم یک جمع زنی مضاعف برروی تعداد حالت دوترازه اتم-کاواک شرکت کننده در گذارهای انرژی است. بنابراین میانگین کار در این حالت عبارت است از

$$\langle W\rangle = \sum_n \sum_{l,m} P_l^0 P_{m|l}^\tau (\varepsilon_m'^n - \varepsilon_l^n). \quad (۸)$$

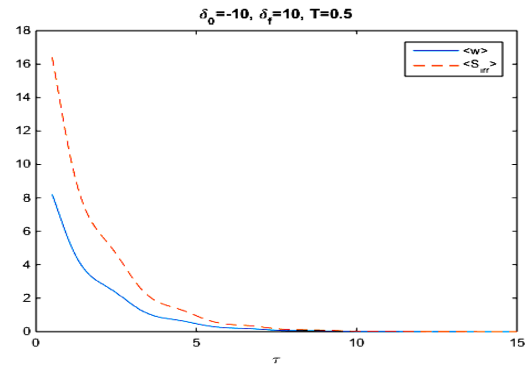
تعداد حالت دوترازه اتم-کاواک (n) در جمع‌زنی فوق متناسب با دمای سامانه است. در ادامه محاسبات $\omega_c=100$ و $g=1$ در نظر گرفته شده است و نتایج عددی مربوط به میانگین کار و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر در دو دمای مختلف $(T=0.2\text{k},\ \text{T}=0.5\text{k})$ به ازای ناکوکی اولیه $\delta_0=-10$ و مقادیر مختلف ناکوکی نهایی، بر حسب زمان نهایی τ رسم شده است. در شکل (۱) کار میانگین و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر برحسب مقادیر مختلف زمان نهایی و به ازای ناکوکی $\delta_f=10$ در دمای $T=0.2\text{k}$ رسم شده است. با محاسبه کمیت $(P_{m|n}^\tau)$ مشخص گردید که در این دمای پایین تنها اولین حالت دوترازه اتم-کاواک $n=1$ در محاسبه کار میانگین(رابطه (۸)) نقش موثر دارد. برای زمانهای نهایی کوچک تغییرات سریع در هامیلتونی، باعث ایجاد حالت نهایی غیرتعادلی شده و بدین منظور برای تغییرات در هامیلتونی سامانه (تغییر حالت سامانه) به ازای این زمانهای کوچک کار انجام داد و مقداری آنتروپی بازگشت‌ناپذیر نیز تولید می‌شود. با افزایش زمان نهایی تغییرات به آرامی صورت می‌گیرد و تغییرات را می‌توان بی-دررو در نظر گرفت. در این حالت آنتروپی بازگشت‌ناپذیر تولید شده به سمت صفر میل می‌کند. تغییرات ناکوکی متقارن بوده $(\delta_f=-\delta_0)$ و بنابراین انرژی سامانه در ابتدا و انتها یکسان است. بنابراین کار میانگین در رسیدن به حالت نهایی به سمت صفر میل می‌کند. در شکل(۲) محاسبات فوق برای بازه نامتقارنی از تغییرات ناکوکی بر حسب زمان تکرار شده است. اگرچه رفتار تولید آنتروپی بازگشت‌ناپذیر همانند قبل است و برای زمان‌های بزرگ به سمت صفر میل می‌کند، میانگین کار انجام شده به سمت صفر میل نمی‌کند. در این حالت انرژی آزاد اولیه و نهایی یکسان نبوده و میانگین کار در زمانهای نهایی بزرگ برابر با اختلاف انرژی آزادهای اولیه و نهایی سامانه است.



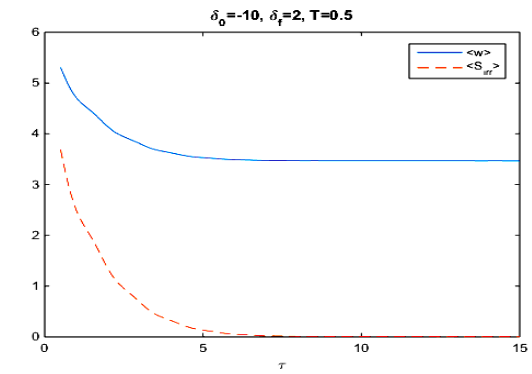
شکل(۱). تغیرات کار میانگین و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر برحسب زمان نهایی در یک بازه متقارن از تغییرات ناکوکی و در دمای $T=0.2\text{k}$.



شکل(۲). تغیرات کار میانگین و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر برحسب زمان نهایی در یک بازه نامتقارن از تغییرات ناکوکی و در دمای $T=0.2\text{k}$.



شکل(3). تغیرات کار میانگین و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر برحسب زمان نهایی در یک بازه متقارن از تغییرات ناکوکی و در دمای $T=0.5\text{k}$.



شکل(۴). تغیرات کار میانگین و آنتروپی بازگشت‌ناپذیر برحسب زمان نهایی در یک بازه نامتقارن از تغییرات ناکوکی و در دمای $T=0.5\text{k}$.

نتایج مربوط به محاسبات در دمای $T=0.5\text{k}$ نیز در شکل‌های (۳) و (۴) تایید کننده رفتار مشابه ترمودینامیکی برای سامانه اتم-کاواک به ازای تغییر در ناکوکی برحسب زمان است. در این دما دومین حالت دوترازه اتم-کاواک هم در محاسبه کار میانگین در نظر گرفته شده است.

۴-نتیجه‌گیری

دراین پژوهش به معرفی و بررسی ترمودینامیک کوانتومی یک سامانه اتم-کاواک به عنوان یک سامانه کوانتومی بسته پرداخته‌ایم. کار میانگین بنابر نظریه افت و خیزها و در تغییرات بی‌دررو (زمان نهایی τ بزرگ) بین حالتهایی با ویژه مقادیر انرژی یکسان (تغییرات متقارن ناکوکی)، صفر می‌شود و بین حالتهایی با ویژه مقادیر انرژی غیریکسان بزرگتر از صفر و معادل انرژی آزاد هلمهولتز است و در نتیجه آنتروپی بازگشت‌ناپذیر در هر دو حالت برابر صفر خواهد شد. بنابراین نتایج بدست آمده از کمیت‌های ترمودینامیکی برای این سامانه در توافق با نظریه‌های مبتنی بر ترمودینامیک کوانتومی از قبیل نظریه افت و خیزهاست.

سپاسگزاری

از آقایان دکتر فرانچسکو پالستینا و نیکولا گولو در دانشگاه کالابریای ایتالیا سپاسگزاری می‌کنم.

مراجع

[1] Herbert B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1985.

[2] F. Plastina, A. Alecce, T. J. G. Apollaro, G. Falcone, G. Francica, F. Galve, N. Lo Gullo, and R. Zambrini, *Irreversible Work and Inner Friction in Quantum Thermodynamic Processes*, Phys. Rev. Lett.**113**, 260601 (2014).

[3] G. Gallavotti and E. G. D. Cohen, *Dynamical ensembles in nonequilibrium statistical mechanics*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2694–2697 (1995).

[4] R. Dorner, J. Goold, C. Cormick, M. Paternostro, and V. Vedral, *Emergent Thermodynamics in a Quenched Quantum Many-Body System*, Phys. Review. Lett **109**, 160601 (2012).

[5] C. Jarzynski, *Nonequilibrium Equality for Free Energy Differences*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2690–2693 (1997).

[6] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51**, 89 (1963).

[7] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.