

معرفی حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده و تولید فیزیکی آنها

امیر کریمی^{(۱),(۲)}؛ محمد کاظم توسلی^{(۳),(۱)}

^(۱) گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^(۲) گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، آباد، فارس

^(۳) گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در دو دهه اخیر، طرح‌های بسیاری به منظور مطالعه و تولید حالت‌های نوع متغیر پیوسته درهم‌تنیده معرفی و پیشنهاد شده است. در این مقاله، پس از مروری کوتاه بر حالت‌های همدوس و چلانده به عنوان دو رده از حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته، به معرفی رده جدیدی از حالت‌های درهم‌تنیده به نام "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" می‌پردازیم. سپس، با ارائه یک طرح‌واره نظری مبتنی بر برهم‌کنش اتم-میدان، حالت‌های درهم‌تنیده معرفی شده را تولید می‌کنیم. در این طرح‌واره، یک اتم سه ترازوی نوع Λ با یک میدان کوانتیده دومی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی برهم‌کنش می‌کند.

کلیدواژه- حالت‌های همدوس، حالت‌های چلانده، حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده.

The introduction of entangled coherent-squeezed states and their physical generation

A. Karimi^{(1),(2)}; M. K. Tavassoly^{(1),(3)}

⁽¹⁾ Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd

⁽²⁾ Department of Physics, Islamic Azad University of Abadeh, Fars

⁽³⁾ Photonic & Research Group, Engineering Research Center, University of Yazd, Yazd

Abstract- In recent two decades, many schemes have been suggested to study and produce entangled continuous-variable-type states. In this paper, after a brief review on the coherent and squeezed states as two types of such quantum states and squeezed states, we introduce a new class of entangled states, namely "entangled coherent-squeezed states". Next, to generate the introduced entangled states, we present a theoretical scheme based on the atom-filed interaction. In the scheme, a Λ -type three-level atom interacts with the two-mode quantized field in the presence of two strong classical fields.

Keywords: Coherent states, Squeezed states, Entangled coherent-squeezed states.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

امروزه مفاهیم احتمال، اندازه‌گیری، تقلیل حالت‌ها و درهم‌تنیدگی به موضوع‌های مهمی در مکانیک کوانتومی تبدیل شده است. مفهوم درهم‌تنیدگی برای اولین بار در سال ۱۹۳۵ توسط شرودینگر مطرح شد. حالت یک سامانه دومی را درهم‌تنیده گویند، اگر نتوان آن را بر حسب حاصل ضرب توابع حالت زیرسامانه‌ها نوشت [۱]. حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده کاربردهای بسیاری در فرایند اطلاعات کوانتومی از قبیل رمزنگاری [۲]، انتقال اطلاعات [۳] و محاسبات کوانتومی [۴] دارند. اخیراً با استفاده از حالت‌های همدوس و چلانده به عنوان دو رده مهم از حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته معمول و مورد استفاده در فرایند اطلاعات کوانتومی، "حالت‌های همدوس درهم‌تنیده" و "حالت‌های چلانده درهم‌تنیده" متنوع بسیاری معرفی و طرح‌های گوناگونی برای تولید آنها پیشنهاد شده است [۵-۷].

در این مقاله، به معرفی و تولید نوع جدیدی از حالت‌های نوع متغیر پیوسته درهم‌تنیده به نام "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" می‌پردازیم که مدهای اول و دوم این حالت‌ها، به ترتیب حالت‌های همدوس و چلانده هستند.

۲- معرفی حالت‌های همدوس-چلانده درهم-تنیده

تنیده

ابتدا به مروری کوتاه بر دو رده از حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته، حالت‌های همدوس و چلانده می‌پردازیم. حالت‌های همدوس، حالت‌هایی با کمترین عدم قطعیت هستند که برای نخستین بار در سال ۱۹۲۶ توسط شرودینگر معرفی شدند. این حالت‌ها که ویژه‌حالت عملگر نابودی هستند ($a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$)، با کنش عملگر جابجایی $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به دست می‌آیند [۸]:

$$|\pm\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1)$$

که در آن a و a^\dagger به ترتیب عملگرهای بوزونی نابودی و آفرینش و $\alpha = re^{i\theta}$ یک عدد مختلط است.

به عنوان یکی دیگر از حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته می‌توان به حالت‌های چلانده اشاره کرد. این حالت‌ها، برای نخستین بار در سال ۱۹۷۰ توسط استولر به شکل ریاضی فرمول‌بندی [۹] و در سال ۱۹۸۵ توسط اسلاشر [۱۰] در آزمایشگاه مشاهده شدند. دو رده از

حالت‌های چلانده به نام حالت‌های چلانده زوج و فرد با کنش عملگر چلانده $S(\xi) = \exp(\frac{\xi^*}{2} a^2 - \frac{\xi}{2} a^{\dagger 2})$ به ترتیب روی حالت خلاء میدان $|0\rangle$ و حالت تک‌فوتونی میدان $|1\rangle$ از رابطه زیر به دست می‌آیند [۱۱]:

$$|\pm\xi\rangle_e = S(\pm\xi)|0\rangle = N_e(\xi) \sum_{p=0}^{\infty} (\mp 1)^p \frac{\sqrt{(2p)!}}{2^p p!} (\tanh r)^p |2p\rangle \quad (2)$$

$$|\pm\xi\rangle_o = S(\pm\xi)|1\rangle = N_o(\xi) \sum_{p=0}^{\infty} (\mp 1)^p \frac{2^p p!}{\sqrt{(2p+1)!}} (\tanh r)^p |2p+1\rangle \quad (3)$$

که در اینجا نیز $\xi = re^{i\theta}$ یک عدد مختلط است. زیرنویس‌های e و o به ترتیب بیان‌گر حالت‌های چلانده زوج و فرد در روابط (۲) و (۳) هستند. ضرایب $N_e(\xi)$ و $N_o(\xi)$ نیز از شرط بهنجارش به دست می‌آیند.

قابل ذکر است که در این مقاله اندازه‌های α و ξ یکسان و برابر r و فاز آنها θ نیز صفر در نظر گرفته شده است. اکنون، با استفاده از حالت همدوس (۱) و حالت‌های چلانده (۲) و (۳)، دو رده از "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$|\psi(\alpha, \xi)\rangle_e = M_e(\alpha, \xi) \left[|\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{e,b} + |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{e,b} \right] \quad (4)$$

$$|\psi(\alpha, \xi)\rangle_o = M_o(\alpha, \xi) \left[|\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{o,b} + |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{o,b} \right] \quad (5)$$

که در آنها $M_e(\alpha, \xi)$ و $M_o(\alpha, \xi)$ ثابت‌های بهنجارش و زیرنویس‌های a و b به ترتیب بیان‌گر مدهای اول و دوم میدان هستند. نمایش عددی "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" در روابط بالا را نیز می‌توان با استفاده از روابط (۱)-(۳) به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi(\alpha, \xi)\rangle_e = M_e(\alpha, \xi) N_e(\xi) \sum_{p,q=0}^{\infty} \left((-1)^p + (-1)^q \right) \frac{r^p}{\sqrt{p!}} \frac{\sqrt{(2q)!}}{2^q q!} (\tanh r)^q |p\rangle |2q\rangle \quad (6)$$

$$|\psi(\alpha, \xi)\rangle_o = M_o(\alpha, \xi) N_o(\xi) \sum_{p,q=0}^{\infty} \left((-1)^p + (-1)^q \right) \frac{r^p}{\sqrt{p!}} \frac{2^q q!}{\sqrt{(2q+1)!}} (\tanh r)^q |p\rangle |2q+1\rangle \quad (7)$$

هدف بعدی ما در این مقاله ارائه یک طرح‌واره فیزیکی به منظور تولید "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" معرفی شده در روابط (۴) و (۵) است.

توصیف دینامیک سامانه با استفاده از میدان‌های کلاسیکی قوی، پایه‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (\Omega_b e^{-i\varphi_b} |1\rangle - \Omega_a e^{-i\varphi_a} |2\rangle)$$

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|3\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (\Omega_a e^{-i\varphi_a} |1\rangle + \Omega_b e^{-i\varphi_b} |2\rangle)]$$

(۹)

که ویژه‌حالت‌های عملگر H_{cl} به ترتیب با ویژه‌مقادیر $0, \pm\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}$ هستند:

$$H_{cl} |0\rangle = 0, \quad H_{cl} |\pm\rangle = \pm\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2} |\pm\rangle \quad (10)$$

سپس، عملگرهای H_{cl} و H_{ca} را بر حسب پایه‌های معرفی شده $|\pm\rangle$ و $|0\rangle$ بازنویسی و به منظور ساده‌سازی دینامیک سامانه، از تصویر برهم‌کنشی که از تبدیل زیر به دست می‌آید، استفاده می‌کنیم [۱۲]:

$$R = \exp[-i\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)t] \quad (11)$$

بر این اساس هامیلتونی تبدیل یافته زیر به دست می‌آید:

$$H' = R^\dagger H R - iR^\dagger \frac{dR}{dt} \quad (12)$$

با فرض محدوده لیزری قوی ($\Omega_a, \Omega_b \gg g_a, g_b$) و حذف جملاتی با نوسان سریع در H' ، هامیلتونی مؤثر H_{eff} به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$H_{eff} = \frac{g_a \Omega_a}{2\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) (e^{-i\varphi_a} a^\dagger + e^{i\varphi_a} a)$$

$$+ \frac{g_b \Omega_b}{2\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) (e^{-i\varphi_b} b^\dagger + e^{i\varphi_b} b)$$

(۱۳)

عملگر تحوّل زمانی متناظر با هامیلتونی (۱۳)، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U(t) = R U_{eff}(t) = R \exp(-iH_{eff}t/\hbar)$$

$$= \exp[-it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)]$$

$$\times \exp\{-it(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)\}$$

$$\times \left[\frac{g_a \Omega_a}{2\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (e^{-i\varphi_a} a^\dagger + e^{i\varphi_a} a) \right.$$

$$\left. + \frac{g_b \Omega_b}{2\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} (e^{-i\varphi_b} b^\dagger + e^{i\varphi_b} b) \right]$$

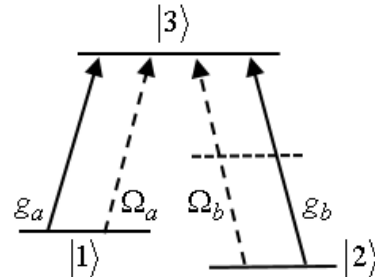
(۱۴)

اکنون، با عبور یک اتم سه‌ترازی از درون کاواک، با تمهید شرایط اولیه مناسب برای اتم و میدان، "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" معرفی شده را تولید می‌کنیم.

بدین منظور، ابتدا اتم سه‌ترازی و میدان را به ترتیب در حالت برانگیخته $|3\rangle$ و حالت‌های خلاء میدان دومی $|0\rangle_a |0\rangle_b$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از عملگر

۳- تولید حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده

در این قسمت، می‌خواهیم با ارائه یک طرح‌واره فیزیکی، "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" معرفی شده در قسمت قبل را تولید کنیم. در این طرح‌واره از برهم‌کنش تشدید یک اتم سه‌ترازی نوع Λ با یک کاواک دومی در حضور دو میدان کلاسیکی قوی استفاده می‌شود. یک تشدیدگر فابری-پرو، کاواک حمل‌کننده دو مد نا همگن a و b میدان و یک اتم سه‌ترازی نوع Λ عناصر تشکیل‌دهنده این چیدمان آزمایشگاهی هستند. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، گذار دوقطبی میان دو حالت پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ اتم سه‌ترازی ممنوع و گذار از حالت برانگیخته $|3\rangle$ به دو حالت با انرژی‌های کمتر مجاز است. گذارهای $|1\rangle$ به $|3\rangle$ ($|2\rangle$ به $|3\rangle$) با مد a (b) کاواک با بسامد ω_a (ω_b) که توسط یک میدان کلاسیکی با دامنه Ω_a (Ω_b) و فاز φ_a (φ_b) برانگیخته شده، جفت شده است. لازم به ذکر است که در این طرح پیشنهادی یکی از دو گذار مجاز در اتم سه‌ترازی نوع Λ ($|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$) گذاری تک‌فوتونی و گذار دیگر ($|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$) گذاری دوفوتونی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- آرایش یک اتم سه‌ترازی نوع Λ و برهم‌کنش آن با دو میدان کلاسیکی و دو مد کاواک.

با در نظر گرفتن مدهای کاواک و میدان‌های کلاسیکی با گذارهای اتمی متناظر در حالت تشدید، هامیلتونی سامانه اتم-میدان را می‌توان در تصویر برهم‌کنش به شکل زیر توصیف کرد:

$$H = H_{cav} + H_{cl}$$

$$H_{cl} = \Omega_a (\sigma_{13} e^{i\varphi_a} + \sigma_{31} e^{-i\varphi_a})$$

$$+ \Omega_b (\sigma_{23} e^{i\varphi_b} + \sigma_{32} e^{-i\varphi_b})$$

$$H_{cav} = g_a (\sigma_{13} a^\dagger + \sigma_{31} a) + g_b (\sigma_{23} b^\dagger + \sigma_{32} b)$$

(۸)

که در آن $|i\rangle\langle j| = \sigma_{ij}$ شبه‌اسپینورهای پائولی و a و a^\dagger (b و b^\dagger) عملگرهای آفرینش و نابودی مد a (b) میدان هستند. در این طرح‌واره فیزیکی پالس‌های لیزری را بسیار قوی ($\Omega_a, \Omega_b \gg g_a, g_b$) در نظر می‌گیریم. برای

۴- نتیجه گیری

این مقاله را با توضیح مختصری بر حالت‌های همدوس و چلانده به عنوان دو رده از حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته معمول و کاربردی در فرایند اطلاعات کوانتومی، آغاز کردیم. سپس، به معرفی نوع جدیدی از حالت‌های نوع متغیر پیوسته درهم‌تنیده به نام "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" پرداختیم که مدهای اول و دوم این حالت‌های کوانتومی درهم‌تنیده دومدی به ترتیب حالت‌های همدوس و چلانده هستند. به منظور تبیین تحقق فیزیکی حالت‌های معرفی‌شده، یک طرح‌واره فیزیکی برای تولید "حالت‌های همدوس-چلانده درهم‌تنیده" معرفی شده بر اساس برهم‌کنش اتم-میدان ارائه کردیم. در این طرح‌واره نظری، یک اتم سه ترازوی نوع Λ در حضور دو میدان کلاسیکی قوی با یک میدان کوانتیده دومدی برهم‌کنش می‌کند. همان‌گونه که ملاحظه شد توانستیم با انتخاب مناسب شرایط اولیه اتم-میدان، حالت‌های موردنظر را در زمان‌های قابل تنظیم تولید کنیم.

تحول زمانی (۱۴)، کنش آن روی حالت سامانه اتم-میدان

$$\alpha = -it \frac{g_a \Omega_a e^{-i\phi_a}}{2\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}}$$

$$\text{و } \xi = -it \frac{g_b \Omega_b e^{-i\phi_b}}{\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}}$$

عبور اتم از میان کاواک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} e^{i\alpha a^\dagger - i\alpha^* a} e^{-\frac{\xi}{2} b^2 + \frac{\xi}{2} b^{\dagger 2}} |+\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b) + (e^{it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} e^{-i\alpha a^\dagger + i\alpha^* a} e^{\frac{\xi}{2} b^2 - \frac{\xi}{2} b^{\dagger 2}} |-\rangle |0\rangle_a |0\rangle_b) \quad (15)$$

با کنش عملگرهای جابجایی و چلانده‌گی ظاهر شده در رابطه بالا بر حالت خلاء میدان دومدی، می‌توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} |+\rangle |\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{e,b} + e^{it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} |-\rangle |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{e,b}) \quad (16)$$

اگر اتم پس از خروج از کاواک در حالت برانگیخته $|3\rangle$ آشکارسازی شود، سامانه در حالت زیر قرار می‌گیرد:

$$|\psi(t)\rangle_e = M_e(\alpha, \xi) \left[e^{-it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} |\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{e,b} + e^{it\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2}} |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{e,b} \right] \quad (17)$$

اکنون می‌توان با انتخاب بازه زمانی $\sqrt{\Omega_a^2 + \Omega_b^2} \tau = 2\pi$ ، "حالت همدوس-چلانده درهم‌تنیده" زوج معرفی شده در رابطه (۴) را به دست آورد:

$$|\psi(\tau)\rangle_e = M_e(\alpha, \xi) \left[|\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{e,b} + |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{e,b} \right] \quad (18)$$

با استفاده از همین روش، نوع دیگر "حالت همدوس-چلانده درهم‌تنیده" معرفی شده در رابطه (۵) با در نظر گرفتن حالت اولیه میدان دومدی کاواک در حالت $|0\rangle_a |1\rangle_b$ به دست می‌آید. در این مورد نیز می‌توان با انجام محاسباتی مشابه با فرایندهایی مشابه (۱۵)-(۱۸)، "حالت همدوس-چلانده درهم‌تنیده" فرد (رابطه (۵)) را به شکل زیر تولید کرد:

$$|\psi(\tau)\rangle_o = M_o(\alpha, \xi) \left[|\alpha\rangle_a |-\xi\rangle_{o,b} + |-\alpha\rangle_a |\xi\rangle_{o,b} \right] \quad (19)$$

مراجع

- [1] E. Schrödinger "Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik", *Naturwissenschaften*, **23** 823, 1935.
- [2] A. Ekert "Quantum cryptography based on Bell's theorem" *Phys. Rev. Lett.* **67** 661, 1991.
- [3] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels" *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895, 1993.
- [4] A. Barenco, D. Dutch, A. Ekert and R. Jozsa "Conditional quantum dynamics and logic gates" *Phys. Rev. Lett.* **74** 4083, 1995.
- [5] V. Man'kov, G. Marmo, E. Sudarshan and F. Zaccaria "f-Oscillators and nonlinear coherent states" *Phys. Scr.* **55** 528 1997.
- [6] A. Karimi and M. K. Tavassoly "Quantum engineering and nonclassical properties of SU(1, 1) and SU(2) entangled nonlinear coherent states" *Phys. Scr.* **90** 015101, 2015.
- [7] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. Wu "Generation of squeezed states by parametric down conversion" *Phys. Rev. Lett.* **57** 2520, 1986.
- [8] E. Schrödinger "Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik" *Naturwissenschaften* **14** 664, 1926.
- [9] D. Stoler "Equivalence classes of minimum uncertainty packets" *Phys. Rev. D* **1** 3217, 1970.
- [10] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley Slusher "Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity" *Phys. Rev. Lett.* **55** 2409, 1985.
- [11] C. C. Gerry and P. L. Knight "Introductory Quantum Optics" Cambridge University Press, New York 2005.
- [12] X. B. Zou and W. Mathis "Generation of an entangled coherent state and reconstruction of a two-mode entangled state via resonant interaction" *Phys. Lett. A* **337** 305, 2005.